Auxiliar 12: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor de Cátedra: Martin Matamala V.
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Javier Fuentes G.
Miércoles 30 de Junio de 2010

P1. Encuentre la parametrización natural de las siguientes curvas:

$$\vec{r_1}(t) = \big(2t, t, 0\big)$$
$$\vec{r_2}(t) = \big(2\cos(t), 2\sin(t), 0\big)$$

Además encuentre el vector tangente, la curvatura, vector normal, vector binormal y torsión para cada una, y en cada caso obténgalo a través de la parametrización natural y de la parametrización dada originalmente.

P2. Encontrar la curvatura de la curva

$$\vec{r}(t) = \big(\cos(t), \sin(t), f(t)\big)$$

donde f es una función dos veces derivable.

P3. Considere la parametrización $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dada por $\vec{r}(t) = \big(\cos^3(t), \sin^3(t), 0\big)$

a) Calcule en los puntos donde estén definidos, vector tangente, vector normal, vector binormal, curvatura y torsión.

b) Calcule el largo total de la curva.

c) Calcule la aceleración de la trayectoria y descompóngala en su componente tangencial y centrípeta.

Problemas Propuestos

P1. La curva en $\mathbb{R}^3$ de parametrización

$$\vec{r}(t) = \big(\sin^2(t), \sin(t)\cos(t), \cos(t)\big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

pasa dos veces por el punto $(1, 0, 0)$. Demuestre que las dos tangentes en ese punto son perpendiculares.

P2. Considere la curva definida por la parametrización

$$\vec{r}(t) = \big(e^{-t}\cos(t), e^{-t}\sin(t), e^{-t}\big) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

a) Demuestre que la curva está contenida en el cono de ecuación $x^2 + y^2 = z^2$.

b) Demuestre que en cada punto de la curva, el vector tangente forma un ángulo constante con el vector $\dfrac{\vec{r}(t)}{\|\vec{r}(t)\|}$

c) Calcule los vectores normal $\hat{N}(t)$ y binormal $\hat{B}(t)$ y la curvatura $\kappa(t)$ y torsión $\tau(t)$ en cada punto de la curva.