Auxiliar 7: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor de Cátedra: Martín Matamala V.
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Javier Fuentes

Miércoles 12 de Mayo de 2010

P1. Demuestre que:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^{1/4}}+\frac{1}{e}\right) \leq \int_0^1 e^{-x^2}\,dx \leq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e^{1/4}}\right)$$

Indicación: Considere la partición $P = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$.

P2. Sea $f : [1, \infty[\to \mathbb{R}$ una función no negativa y creciente.

a) Usando la partición $P = \{1, ..., n\}$ pruebe que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \leq \int_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{i=2}^{n} f(i), \qquad \forall n \geq 2$$

b) Considere $f(x) = \ln(x)$ y utilice la parte anterior para demostrar que:

$$(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!, \qquad \forall n \geq 1$$

P3. Sea f definida y acotada en $[a, b]$. Muestre que $\underline{\int_a^b} -f = -\overline{\int_a^b} f$.

P4. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) tal que:

$$\forall x \in (a, b)\ |f'(x)| \leq K$$

a) Usar el TVM para derivadas para demostrar que:

$$\forall P \in \mathcal{P}_{a,b} \quad S(f, P) - s(f, P) \leq K\|P\|(b-a) \tag{1}$$

b) Deducir que toda función que satisfaga la propiedad 1 es integrable en $[a, b]$.

c) Demostrar que toda función que satisfaga la propiedad 1 también satisface lo siguiente:

$$\left|\int_a^b f - \frac{1}{2}(S(f, P) + s(f, P))\right| \leq \frac{1}{2}K\|P\|(b-a)$$

P5. Considere la sucesión $a_n = \int_0^n q^x dx$, con $0 < q < 1$.

a) Explique por qué (a_n) está bien definida, es decir, por qué q^x es Riemann integrable en $[0, n]$, y muestre que es estrictamente creciente.

b) Calcule las sumas de Riemann inferior y superior para q^x y la partición $P = \{0, 1, ..., n\}$.

c) Utilice las sumas anteriores para obtener las siguientes cotas para (a_n):

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad q\frac{1-q^n}{1-q} < \int_0^n q^x\,dx < \frac{1}{1-q}$$

d) Concluya que (a_n) converge y que $a = \lim a_n$ satisface:

$$\frac{q}{1-q} \leq a \leq \frac{1}{1-q}$$