

Auxiliar Extra: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor de Cátedra: Martín Matamala V.
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Javier Fuentes
Miércoles 05 de Mayo de 2010

P1. Sea $[a, b]$, $a < b$ y $f(x)$ una función definida en $[a, b]$, positiva y continuamente derivable en (a, b) . Se definen las funciones $g(x)$ y $h(x)$ de la siguiente forma:

- $g(x) = (x - a)(x - b)f(x) \quad \forall x \in [a, b]$
- $h(x) = g'(x) + cg(x)$ para algún $c \in \mathbb{R}$

Probar que h tiene al menos una raíz en (a, b) .

P2. Se dice que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es de variación acotada sobre $[a, b]$ si existe una constante $k \geq 0$ tal que: $\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq k$, cualquiera sea el conjunto de puntos t_i tales que: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , y f' es acotada en (a, b) , entonces f es de variación acotada en $[a, b]$. Ind. Utilice el teorema del valor medio.

P3. Estudiar completamente la función definida por $f(x) = e^{\sqrt{2}\sin(x)}$ indicando:

- a) Dominio, ceros, signos de f , continuidad y periodicidad.
- b) Crecimiento y valores extremos relativos y absolutos.
- c) Concavidad (convexidad) y puntos de inflexión.
- d) Recorrido y gráfico aproximado.

P4. Calcular:

- a) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} dx$
- b) $\int x^3 \sqrt{1-x^2} dx$

P5. Calcular, usando integración por partes, $\int \arcsin\left(\sqrt{\frac{x}{x+1}}\right) dx$

P6. Prueba que $I_n = \int \frac{e^{ax}}{x^n}$ para $n \geq 2$, satisface la recurrencia:

$$I_n = -\frac{e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}I_{n-1}$$