Auxiliar 4: Cálculo Diferencial e Integral

Profesor de Cátedra: Martin Matamala V.
Profesores Auxiliares: Orlando Rivera Letelier y Javier Fuentes G.
Miércoles 21 de Abril de 2010

P1. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $f(0) = g(0) = 1$ y además

$$\big(\forall x \in \mathbb{R}\big) \qquad f'(x) = -xf(x) \quad \wedge \quad g'(x) = xg(x)$$

i) Pruebe que la función $f \cdot g$ es constante. Deduzca que $\big(\forall x \in \mathbb{R}\big) f(x) > 0 \wedge g(x) > 0$.

ii) Estudie crecimiento, máximos y mínimos de la función f.

iii) Calcule f'' en función de f. Estudie convexidad y concavidad de f.

iv) Demuestre que $\big(\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\big)\big(\exists \xi \text{ entre } 0 \text{ y } x\big)\ f(x) = -f''(\xi)$.

v) Estudie el crecimiento de f' y demuestre que f' es acotada en $\mathbb{R}$.

vi) Deduzca que

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

Bosqueje un gráfico de f.

P2. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en todo $\mathbb{R}$. Dados $a \in \mathbb{R}$ y $h \in \mathbb{R}$, se define

$$g(t) = f(t) + f'(t) \cdot (a + h - t)$$

Probar que $\big(\exists c \in (a, a+h)\big)\ f(a+h) = f(a) + f'(a)h + hf''(c)(a+h-c)$.

P3. *a)* Encuentre un valor aproximado para $\sqrt[3]{28}$ utilizando un polinomio de grado dos y estime el error.

b) Desarrolle la expansión de Taylor de la función $\dfrac{1}{1-x}$ y a partir de este encuentre el desarrollo de Taylor de la función $\dfrac{1}{1+x^2}$.