Control 3 Introducción al Cálculo MA 1001

Pauta Problema 1

Las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son

$$f(x) = A\cos^2 x + B\,\text{sen}^2 x - 2C\,\text{sen}\,x\cos x$$
$$g(x) = A\,\text{sen}^2 x + B\cos^2 x + 2C\,\text{sen}\,x\cos x$$
$$h(x) = (A-B)\,\text{sen}\,x\cos x + C(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ son constantes con $A > B$

i) Probar que si $C=0$, h alcanza su valor máximo para $x = k\pi + \pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$

En efecto, si $C=0$, $h(x) = (A-B)\,\text{sen}\,x\cos x = \frac{A-B}{2}\,\text{sen}\,2x$

(1.0) $A > B \Rightarrow \frac{A-B}{2} > 0$, así, $h(x)$ será máximo si $\text{sen}\,2x = 1$

es decir si $2x = \pi/2$, pero según el período 2π de la función seno.

(0.5) $2x = 2k\pi + \pi/2 \Rightarrow x = k\pi + \pi/4$

ii) Demostrar que el conjunto de los ceros de h es $\{x \in \mathbb{R} / \text{tg}\,2x = \frac{2C}{B-A}\}$

En efecto, $h(x) = 0 \Rightarrow (A-B)\,\text{sen}\,x\cos x + C(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{A-B}{2}\,\text{sen}(2x) + C\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \frac{A-B}{2}\,\text{sen}(2x) = -C\cos 2x$$

(1.5) $$\Rightarrow \text{tg}(2x) = -\frac{C}{A-B/2} = \frac{2C}{B-A}$$

iii) Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$ los puntos $P(f(x), h(x))$ y $Q(g(x), -h(x))$ conservan una distancia constante entre ellos y que el punto medio del trazo $\overline{PQ}$ es un punto fijo.

La distancia $\overline{PQ}$ será: $\overline{PQ} = \sqrt{(f(x)-g(x))^2 + (2h(x))^2}$

donde $f(x) - g(x) = A(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + B(\text{sen}^2 x - \cos^2 x) - 4C\,\text{sen}\,x\cos x$

(1.0) Es decir $f(x) - g(x) = A\cos 2x - B\cos 2x - 2C\operatorname{sen} 2x = (A-B)\cos 2x - 2C\operatorname{sen} 2x$

(0.5) Además $h(x) = \frac{A-B}{2}\operatorname{sen} 2x + C\cos 2x \Rightarrow 2h(x) = (A-B)\operatorname{sen} 2x + 2C\cos 2x$

Así $\overline{PQ} = \sqrt{[(A-B)\cos 2x - 2C\operatorname{sen} 2x]^2 + [(A-B)\operatorname{sen} 2x + 2C\cos 2x]^2}$

$$= \sqrt{(A-B)^2\underbrace{(\cos^2 2x + \operatorname{sen}^2 2x)}_{1} + 4C^2\underbrace{(\operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x)}_{1}}$$

(1.0) Sigue que $\overline{PQ} = \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2} =$ constante

El punto medio M de $\overline{PQ}$ es tal que

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{f(x) + g(x)}{2} = \frac{A(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x) + B(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x)}{2}$$

$$\Rightarrow x_M = \frac{A+B}{2}$$

$$y_M = \frac{h(x) + (-h(x))}{2} = 0$$

(0.5) Así $M\left(\frac{A+B}{2}, 0\right)$ es punto fijo (independiente de x)

Pauta Problema 2

La función está definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$. Se pide

i) Dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$

(0.5) - Ceros: $x=0$ único cero.

(0.5) - Paridad: $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow f$ es impar.

y por lo tanto simétrica c/r el origen.

(1.0) - Asíntotas: Presenta asíntotas verticales $x=1$ y $x=-1$ y asíntota horizontal $y=0$ (Eje OX)

ii) Demuestre que $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom} f$: $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$

Use este resultado para estudiar el crecimiento de f, indicando en que intervalos esta función es creciente y en cuales decreciente.

Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom} f$. $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{x_2}{x_2^2-1} - \dfrac{x_1}{x_1^2-1}$

$$= \frac{x_2(x_1^2-1) - x_1(x_2^2-1)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)} = \frac{x_2x_1^2 - x_1x_2^2 - x_2 + x_1}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} = \frac{x_1x_2(x_1-x_2) + (x_1-x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

(1.0) Sigue que $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$

Como f es impar, bastará estudiar crecimiento en $\mathbb{R}^+$

Así, si $x_1, x_2 \in (0,1)$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{(<0)(>0)}{(<0)(<0)} < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

es decir f decrece en $(0,1)$

Si $x_1, x_2 \in (1,\infty)$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{(<0)(>0)}{(>0)(>0)} < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

de donde f también decrece en $(1,\infty)$

Usando la imparidad, en $(-\infty,-1)$ f decrece, en $(-1,0)$ f decrece,

1.0 en $(0,1)$ f decrece y en $(1,\infty)$ f decrece.

iii) Calcule $f((1,\infty))$ y pruebe que $\tilde{f}:(1,\infty)\longrightarrow f((1,\infty))$
$x \longrightarrow \tilde{f}(x)=f(x)$

es biyectiva y determine su inversa.

Si $x\in(1,\infty) \Rightarrow f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}>0$ y además en $x=1$ hay

0.5 asíntota vertical. Se sigue que $f((1,\infty))=(0,\infty)$

Así $\tilde{f}:(1,\infty)\longrightarrow f((1,\infty))=(0,\infty)$
$x\longrightarrow \tilde{f}(x)=f(x)$

$\tilde{f}$ es por definición sobreyectiva

Para la inyectividad, sean $x_1,x_2\in(1,\infty)$ tales que $\tilde{f}(x_1)=\tilde{f}(x_2)$

$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1)=0$ y usando la propiedad en (ii) se tiene

$$\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}=0 \Rightarrow x_1=x_2 \Rightarrow \tilde{f} \text{ es inyectiva}$$

Sigue que $\tilde{f}$ es biyectiva

0.5 y su inversa será $x=\dfrac{y}{y^2-1} \Rightarrow xy^2-y-x=0 \Rightarrow y=\dfrac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2x}$

iv) Gráfico

1.0