Control 1, MA1001 CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (17 de Marzo)

Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de los neutros e inversos aditivo y multiplicativo, demuestre las siguientes propiedades:

a) *(1 pto.)* $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $(a^2)^{-1} = (a^{-1})^2$. Es decir, el recíproco de a^2 es $(a^{-1})^2$.

Obs: Aqui se ha usado la notación $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R}; x \neq 0\}$.

b) *(2 ptos.)* $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}^*$, $(-a)b^{-1} = -(ab^{-1})$.

Obs: Si en su demostración necesita la propiedad $x \cdot 0 = 0$, *deberá demostrarla.*

c) *(3 ptos.)* $\forall a, c \in \mathbb{R}$, $\forall b, d \in \mathbb{R}^*$, se tiene que

$$a(b+d) = b(a+c) \Longrightarrow ab^{-1} = cd^{-1}$$

Obs: Debe indicar todos los axiomas utilizados y ser riguroso en el uso de los paréntesis.

Solución y pauta Control 1, MA1001 CALCULO
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (17 de Marzo)

Usando los axiomas de cuerpo de los números reales y los teoremas de unicidad de los inversos aditivo y multiplicativo, demuestre las siguientes propiedades:

a) *(1 pto.)* $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $(a^2)^{-1} = (a^{-1})^2$. Es decir, el recíproco de a^2 es $(a^{-1})^2$.
Solución.
Como lo indica el enunciado, debe probarse que el recíproco de a^2 es $(a^{-1})^2$. Es decir

$$\text{P.D.Q.: } a^2 \cdot (a^{-1})^2 = 1$$

Para probar esta proposición, desarrollamos el producto de la izquierda del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
a^2 \cdot (a^{-1})^2 &= (a \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot a^{-1}) && \text{; Definición de } x^2 = x \cdot x \\
&= a \cdot \left(a \cdot (a^{-1} \cdot a^{-1})\right) && \text{; Axioma Asociatividad} \\
&= a \cdot \left((a \cdot a^{-1}) \cdot a^{-1}\right) && \text{; Axioma Asociatividad} \\
&= a \cdot \left(1 \cdot a^{-1}\right) && \text{; Axioma Recíproco o inverso multiplicativo} \\
&= a \cdot a^{-1} && \text{; Axioma elemento neutro multiplicativo} \\
&= 1 && \text{; Axioma Recíproco o inverso multiplicativo}
\end{aligned}$$

1.0

b) *(2 ptos.)* $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall b \in \mathbb{R}^*$, $(-a)b^{-1} = -(ab^{-1})$.

Obs: Si en su demostración necesita la propiedad $x \cdot 0 = 0$, deberá demostrarla.
Solución.
Aquí de debe probar que el opuesto de ab^{-1} es el real $(-a)b^{-1}$.
Es decir:

$$\text{P.D.Q.: } ab^{-1} + (-a)b^{-1} = 0$$

0.5

Para demostrar esta proposición, desarrollamos el real del lado izquierdo del modo siguiente:

$$\begin{aligned}
ab^{-1} + (-a)b^{-1} &= \left(a + (-a)\right) \cdot b^{-1} && \text{; Axioma distributividad} \\
&= 0 \cdot b^{-1} && \text{; Axioma elemento opuesto} \\
&= 0 && \text{; Propiedad } x \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Para concluir la demostración, se debe probar que $\forall x \in \mathbb{R},\ x \cdot 0 = 0$.
Una posible demostración de esta propiedad es:

0.5

$$
\begin{aligned}
a\cdot 0 &= a\cdot 0+0 && \text{; Axioma elemento neutro aditivo}\\
&= a\cdot 0+\Big(a\cdot 0+\big(-(a\cdot 0)\big)\Big) && \text{; Axioma opuesto}\\
&= \Big(a\cdot 0+a\cdot 0\Big)+\big(-(a\cdot 0)\big) && \text{; Axioma Asociatividad}\\
&= \Big(a\cdot(0+0)\Big)+\big(-(a\cdot 0)\big) && \text{; Axioma Distributividad}\\
&= (a\cdot 0)+\big(-(a\cdot 0)\big) && \text{; Axioma neutro aditivo}\\
&= 0 && \text{; Axioma opuesto}
\end{aligned}
$$

1.0

c) *(3 ptos.)* $\forall a, c \in \mathbb{R}$, $\forall b, d \in \mathbb{R}^*$, se tiene que

$$a(b+d)=b(a+c) \Longrightarrow ab^{-1}=cd^{-1}$$

Solución.
Desarrollando el dato $a(b+d)=b(a+c)$ se obtiene:

$$
\begin{aligned}
a(b+d)=b(a+c) &\Longrightarrow ab+ad=ba+bc && \text{; Axioma distributividad}\\
&\Longrightarrow ab+ad=ab+bc && \text{; Axioma conmutatividad}\\
&\Longrightarrow (-(ab))+(ab+ad)=(-(ab))+(ab+bc) && \text{; Sumar -(ab) al mismo real}\\
&\Longrightarrow \Big((-(ab))+ab\Big)+ad=\Big((-(ab))+ab\Big)+bc && \text{; Ax. Asociatividad}\\
&\Longrightarrow 0+ad=0+bc && \text{; Ax. opuesto}\\
&\Longrightarrow ad=bc && \text{; Ax. neutro aditivo}
\end{aligned}
$$

1.5

En esta última igualdad se puede multiplicar por $b^{-1}d^{-1}$ del modo siguiente:

$$
\begin{aligned}
ad=bc &\Longrightarrow (ad)\Big(b^{-1}d^{-1}\Big)=(bc)\Big(b^{-1}d^{-1}\Big) && \text{; Multiplicar por } b^{-1}d^{-1}\\
&\Longrightarrow (ad)\Big(d^{-1}b^{-1}\Big)=(cb)\Big(b^{-1}d^{-1}\Big) && \text{; Ax. Conmutatividad}\\
&\Longrightarrow \Big((ad)d^{-1}\Big)b^{-1}=\Big((cb)b^{-1}\Big)d^{-1} && \text{; Ax. Asociatividad}\\
&\Longrightarrow \Big(a(dd^{-1})\Big)b^{-1}=\Big(c(bb^{-1})\Big)d^{-1} && \text{; Ax. Asociatividad}\\
&\Longrightarrow \Big(a\cdot 1\Big)b^{-1}=\Big(c\cdot 1\Big)d^{-1} && \text{; Ax. recíproco}\\
&\Longrightarrow a\cdot b^{-1}=c\cdot d^{-1} && \text{; Ax. neutro}
\end{aligned}
$$

1.5