Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo
Semana 12 Límites de Funciones
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.
Semestre Otoño 2010
Fecha: Lunes 21 de Junio de 2010

P1.- Demuestre que las rectas $y = \pm\frac{b}{a}x$ son las asíntotas oblicuas de las hipérbolas $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$.

Solución:
Vamos a mostrar que $y = \frac{b}{a}x$ es asíntota de $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, ya que es equivalente mostrar que $m = \frac{b}{a}$ y $n = 0$, con $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 + x^2}$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{b\sqrt{a^2+x^2}}{ax} = \frac{b}{a}$$

$$n = \lim_{x\to\infty} f(x) - \frac{b}{a}x = \lim_{x\to\infty} \frac{b}{a}\left[\sqrt{a^2+x^2} - x\right]$$

$$n = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty} \frac{a^2+x^2-x^2}{\sqrt{a^2+x^2}+x} = \frac{b}{a}\lim_{x\to\infty} \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}+x} = 0$$

Luego los otros casos son análogos, considerando $x \to -\infty$.

P2.- Si $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, demuestre que el dominio A de f permite estudiar el límite de f cuando $x \to x_0^+$ ssi existe al menos una sucesión (s_n) en A que cumple $s_n \to x_0$ y $s_n > x_0$, $\forall n$.
Use este resultado para estudiar si en los siguientes casos, los dominios de las funciones permiten o no estudiar el límite cuando $x \to x_0^+$.
a) $A = (x_0, x_0 + 1)$
b) $A = (x_0, x_0 + \frac{1}{n}); n \in \mathbb{N}$
c) $A = (x_0, x_0 + \frac{n}{n+1}); n \in \mathbb{N}$
d) $A = (x_0, x_0 + \frac{m+n}{mn}); m, n \in \mathbb{N}$
e) $A = (x_0, x_0 + 1) \cap \mathbb{Q}$
f) $A = \mathbb{Q}$
g) $A = (x_0, x_0 + \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right); n \in \mathbb{N}$

Solución:
($\Rightarrow$) Si el dominio A permite estudiar el límite de f cuando $x \to x_0^+$ luego:

$$\forall \delta > 0, \exists x \in A \cap (x_0, x_0 + \delta)$$

Si consideramos $\delta = \dfrac{1}{n}$, luego:

$$\forall n > 0, \exists x \in A \cap (x_0, x_0 + \frac{1}{n})$$

Equivalentemente:

$$\forall n > 0, \exists x_n \in A, x_0 < x_n \leq x_0 + \frac{1}{n}$$

Si tomamos $x_n = s_n$, se tiene que $s_n > x_0$ y que $s_n \to x_0$ (por sandwich), así la sucesión cumple con lo pedido.
($\Leftarrow$) Como hipótesis tenemos una sucesión $s_n > x_0$ tal que $s_n \to x_0$, luego:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n > n_0 \quad |s_n - x_0| < \epsilon$$

Luego, se tiene que: $s_n < x_0 + \epsilon$ y como $s_n > x_0$:

$$x_0 < s_n < x_0 + \epsilon$$

por lo tanto:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists x = s_n \in A \cap (x_0, x_0 + \epsilon)$$

lo que es equivalente a que el conjunto A nos permite analizar el límite cuando $x \to x_0^+$ de f.

Ya demostrado lo anterior procedemos a ver los casos particulares, estos deben cumplir $s_n \in A$, $s_n > x_0$ y $s_n \to x_0$:
a) Si tomamos $s_n = x_0 + \frac{1}{n+1}$, luego A permite analizar el límite.
b) Si tomamos $s_n = x_0 + \frac{1}{n}$, luego A permite analizar el límite.
c) A no permite pues $x_0 + \frac{n}{n+1}$ no converge a x_0.
d) Esto es equivalente a $A = (x_0, x_0 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}; m, n \in \mathbb{N}$, y si tomamos $s_n = x_0 + \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ e imponiendo por ejemplo $m = n$ ó $m = 2n$ implica que en A si se puede analizar el límite.
e) Dado que el $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ uno siempre puede encontrar un racional entre dos reales. Luego A permite analizar el límite.
f) Como $A = (x_0, x_0 + 1) \subseteq \mathbb{Q}$, se puede construir una sucesión por ejemplo la utilizada en a).
g) Si usamos $s_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ y como $0 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$ por sandwich se tiene que cumple las condiciones. Luego A permite analizar el límite.

P3.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones tal que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = l$
Usando la definición de límite cuando $x \to \infty$

a) $\lim_{x\to\infty} max\{f(x), g(x)\} = l$
b) $\lim_{x\to\infty} max\{f(x), l\} = l$
c) $\lim_{x\to\infty} max\{f(x), l + \frac{1}{x}\} = l$

Solución:
a) Vamos a usar que

$$max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}$$

Por definición:
$\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ es equivalente a $\forall \epsilon_f \exists m_f(\epsilon_f), \forall x \in [m_f, \infty), |f(x) - l| < \epsilon_f$, análogamente:

$\lim_{x\to\infty} g(x) = l$ es equivalente a $\forall\epsilon_g \exists m_g(\epsilon_g), \forall x \in [m_g, \infty), |g(x) - l| < \epsilon_g$.
$\lim_{x\to\infty} max\{f(x), g(x)\} = l$ es equivalente a:
$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2}$ Dado en ϵ se toma $m = max\{m_f, m_g\}$ entonces:

$$|\frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2} - l| = \frac{f - l + g - l + |f + g|}{2} \leq \frac{|\epsilon + \epsilon| + \epsilon + \epsilon}{2} = 2\epsilon$$

Luego:
$\lim_{x\to\infty} max\{f(x), g(x)\} = l$
b) y c) Se desarrolla de manera análoga.

P4.- Demuestre que si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisface la propiedad:

$$\exists L > 0, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, |f(x_1) - f(x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$$

entonces, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Verifique que las funciones $f(x) = x$ y $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ satisfacen la propiedad, pero la función $f(x) = x^2$ no.

Solución:
Si elegimos $x_2 = x_0$ y $x_1 = x_0 + \frac{1}{u}$, reemplazando en la propiedad:

$$-L\left|\frac{1}{u}\right| \leq f(x_0 + \frac{1}{u}) - f(x_0) \leq L\left|\frac{1}{u}\right|$$

Haciendo un poco de álgebra:

$$f(x_0) + -L\left|\frac{1}{u}\right| \leq f(x_0 + \frac{1}{u}) \leq f(x_0) + L\left|\frac{1}{u}\right|$$

y aplicando sandwich (cuando $u \to \infty$):

$$\lim_{u\to\infty} f(x_0 + \frac{1}{u}) = f(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Para el caso $f(x) = x$:
Debemos encontrar un $L > 0$, tal que:

$$|x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|$$

tomando $L = 1$ se tiene la solución.
Para el caso $f(x) = \operatorname{sen}(x)$:
Usamos la desigualdad: $|\operatorname{sen}(x)| \leq x \ \forall x \in \mathbb{R}$, luego:

$$-x_1 \leq \operatorname{sen}(x_1) \leq x_1 \quad x_2 \leq \operatorname{sen}(-x_2) \leq -x_2$$

sumando ambas desigualdades:

$$|\operatorname{sen}(x_1) - \operatorname{sen}(x_2)| \leq |x_1 - x_2|$$

al igual que el caso anterior, tomando $L = 1$ se tiene la solución.
Para el caso $f(x) = x^2$:
Debemos encontrar un $L > 0$, tal que:

$$|x_1^2 - x_2^2| \leq L|x_1 - x_2|$$

pero $|x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2|$, así:

$$|x_1 + x_2||x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2|$$

Obviamente si suponemos $x_1 = x_2$ la desigualdad es trivial, suponemos entonces que $x_1 \neq x_2$:

$$|x_1 + x_2| \leq L$$

Lo que es una contradicción, pues x^2 no es acotada superiormente.

P5.- Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

Pruebe que:
a) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$.
b) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ si (q_n) es una sucesión que converge a x_0 tal que $\forall n \in \mathbb{N}$ $q_n > x_0$ entonces $\lim_{x \to x_0^+} f(q_n) = f(x_0)$.
c) $\forall q \in \mathbb{Q}$ se cumple $f(q) = qf(1)$. Indicación: pruebe por inducción la fórmula para $q \in \mathbb{N}$, y luego extiéndala a $q \in \mathbb{Z}$ y $q = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}$.
d) $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple $f(x_0) = x_0 f(x_0)$. Indicación: use la densidad de los racionales en $\mathbb{R}$.

Solución:
a) Si tomamos $x_1 = x_2 = 0$, nos queda $f(0) = f(0) + f(0)$ lo que implica $f(0) = 0$, además: $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow -f(x) = f(-x)$ (f es impar).
En general $f(x_1 - x_2) = f(x_1 + (-x_2)) = f(x_1) + f(-x_2) = f(x_1) - f(x_2)$ Para demostrar lo pedido, basta demostrar que:
$\lim_{x \to 0^+} f(x) - f(0) = 0$, tomando lo primero y usando la propiedad 2:
$\lim_{x \to 0^+} f(x) - f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x - 0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$.
b) De la parte anterior, calculamos:
$\lim_{x \to x_0^+} f(q_n) - f(x_0)$
$\lim_{x \to x_0^+} f(q_n - x_0)$ y como $q_n > x_0$ (el límite corresponde por la derecha), así:
$\lim_{x \to x_0^+} f(q_n - x_0) = f(0) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^+} f(q_n) = f(x_0)$.
c) Utilizamos inducción, caso base, p.d.q f(2)=2f(1); de la definición de la función:

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$$

Hipótesis de inducción: f(n)=nf(1).
Tésis de inducción: f(n+1)=(n+1)f(1).
Por definición, y usando la hipótesis se tiene:

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n + 1)f(1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si $x \in \mathbb{Z}$ debemos mostrar que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $f(-n) = -nf(1)$, de la parte a) y b):

$$f(-n) = -f(n) = -nf(1)$$

Para el caso de los racionales sea $q = p/r$ con $p, r \in \mathbb{Z}$ tal que $r \neq 0$.

$$f(1) = f(r \cdot \frac{1}{r}) = rf(\frac{1}{r}) \Leftrightarrow f(\frac{1}{r}) = \frac{1}{r}f(1)$$

Para el caso de $q = p/r$:

$$f(q) = f(p \cdot \frac{1}{r}) = pf(\frac{1}{r}) = \frac{p}{r}f(1) = qf(1)$$

d) Como f es continua (por lo probado en a)), y dada la densidad de los racionales, sea r irracional, por densidad se tiene que $x_n \in \mathbb{Q}$ tal que $\lim x_n = x_0$.

$$f(x_0) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_n f(1) = f(1) \lim x_n = x_0 f(1)$$

P6.- Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad f(x_2) \geq f(x_1) + g(x_1)(x_1 - x_2)$$

a) Muestre que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2)$$

b) Probar que si g es una función acotada, entonces $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ se cumple:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

c) Probar que si:

$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \lim_{x \to a^-} g(x) = g(a)$$

entonces:

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -g(a)$$

Solución:
a) De la relación dada:

$$f(x_2) \geq f(x_1) + g(x_1)(x_1 - x_2) \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2)$$

La otra desigualdad, se obtiene intercambiando x_1 por x_2:

$$f(x_1) \geq f(x_2) + g(x_2)(x_2 - x_1) \Leftrightarrow g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1)$$

Así:

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R} \quad g(x_2)(x_1 - x_2) \geq f(x_2) - f(x_1) \geq g(x_1)(x_1 - x_2)$$

b) Como g es una función acotada, existen m, M tal que $(x > x_0)$:

$$m \leq g(x) \leq M \Leftrightarrow m(x - x_0) \leq g(x)(x - x_0) \leq M(x - x_0)$$

Y usando la parte a) con $x_1 = x_0$ y $x_2 = x$:

$$m(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq M(x - x_0)$$
$$m(x - x_0) + f(x_0) \leq f(x) \leq M(x - x_0) + f(x_0)$$

Ahora, si $x \to x_0$ y por sandwich se tiene:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

c) De lo probado en la parte a), con $x_1 = x$ y $x_2 = a$ sin pérdida de generalidad $x_0 > a$:

$$g(a)(x - a) \geq f(a) - f(x) \geq g(x)(x - a)$$

Dividiendo por $-(x - a)$:

$$-g(a) \geq \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq -g(x)$$

Si $x \to a$ y aplicando sandwich:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -g(a)$$