Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo

Semana 11 Función Exponencial y Logaritmo

Profesor: Raul Gormaz A.

Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.

Semestre Otoño 2010

Fecha: Lunes 14 de Junio de 2010

P1.- Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

Solución:
Al manipular algebraicamente la expresión que va dentro de la sumatoria, se tiene que:

$$\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$$

Luego:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt[n]{n+1})$$

Pero usando que si a_n converge a a luego $\ln(a_n)$ converge a $\ln(a)$, vemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$$

Así:

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\sqrt[n]{n+1}) = \ln(1) = 0$$

P2.- Demuestre que $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ e $y_n = x_n - \dfrac{1}{n}$ son convergentes y poseen igual límite.

Solución:
Es importante tener claro las desigualdades del logaritmo:

$$1 - \frac{1}{x} \leq \ln(x) \leq x - 1 \quad \forall x > 0$$

Debemos ver la monotonía de x_n e y_n, ojo que usamos la desigualdad del logaritmo:

$$x_{n+1} - x_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right)$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} - 1 = 0 \Rightarrow x_{n+1} \leq x_n$$

Luego x_n es decreciente. Con esto se deduce que $x_1 \geq x_n$ (1).

$$y_{n+1} - y_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \frac{1}{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) - \frac{1}{n} \right)$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq \frac{1}{n} + 1 - \frac{n+1}{n} = 0 \Rightarrow y_{n+1} \geq y_n$$

Luego y_n es creciente. Con esto se deduce que $y_1 \leq y_n$ (2).
De la definición de x_n e y_n se ve que:

$$x_n - y_n = \frac{1}{n} \geq 0 \Rightarrow x_n \geq y_n \quad (3)$$

Juntando (1), (2) y (3):

$$y_1 \leq y_n \leq x_n \leq x_1$$

Con esto tenemos que las sucesiones son monótonas y acotadas, luego por el teorema de las sucesiones monótonas se tiene que ambas son convergentes, y que:

$$\lim y_n = \lim \left(x_n - \frac{1}{n} \right) = \lim x_n$$

Como dato el número a cual convergen estas sucesiones se conoce como la constante de Euler-Mascheroni (que es irracional) denominada γ, y su valor aproximado es $\gamma \approx 0,577215664\ldots$

P3.- Para $x > 0$ calcule $\lim n(\sqrt[n]{x} - 1)$.

Solución:
Realizando un cambio de variables $x = e^y$ ya que $x > 0$. Luego el límite queda

$$\lim \frac{e^{\frac{y}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

Debemos recordar que si $a_n \to 0$ entonces:

$$\lim \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \to 1 \quad \lim \frac{e^{a_n} - 1}{a_n} \to 1$$

En particular $a_n = \frac{y}{n}$, luego:

$$\lim \frac{e^{\frac{y}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim y \cdot \frac{e^{\frac{y}{n}} - 1}{\frac{y}{n}} = y \cdot 1 = y = \ln(x)$$

P4.- Calcule $\lim(1 + a_n)^{\frac{1}{exp(2a_n)-1}}$.

Aplicando logaritmo natural y usando los límites anteriores:

$$\lim \frac{\ln(1+a_n)}{exp(2a_n) - 1} = \frac{1}{2} \lim \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} \cdot \frac{2a_n}{exp(2a_n) - 1} = \frac{1}{2}$$

Así, aplicando la función exponencial:

$$\lim (1+a_n)^{\frac{1}{exp(2a_n)-1}} = \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

P5.- Las tasas de interés en tres instituciones son 6 % anual, 0,5 % mensual y $100(e^{0,3\alpha}-1)$ %. Ordene las instituciones de acuerdo a la rentabilidad obtenida en un depósito a cinco años, para los siguientes valores de $\alpha : 0, 1, \ln(3)$. Recuerde que si en un periodo de tiempo la tasa de interés es t % entonces, el capital aumenta en ese periodo en un factor $(1+t/100)$.

Solución:
Para mayor facilidad llevaremos los capitales a 5 años:
Institución A (6 % anual): el factor es: $(1+6/100)^5 = 1,3382$.
Institución B (0,5 % mensual): el factor es: $(1+0,5/100)^60 = 1,3489$.
Institución C_1 ($\alpha = 0$): el factor es: $(1+(e^0-1)) = 1$.
Institución C_2 ($\alpha = 1$): el factor es: $(1+(e^{0,3}-1)) = 1,3499$.
Institución C_3 ($\alpha = \ln(3)$): el factor es: $(1+(e^{0,3\ln(3)}-1)) = 1,3904$.

Así el orden de rentabilidad es: $C_1 < A < B < C_2 < C_3$.

P6.- Para la función $f(x) = \ln(1+e^x)$, determine dominio, ceros, crecimiento y signos. Además, determine para que valores de y la ecuación $f(x) = y$ tiene solución. Use esta información para definir la función inversa. Repita el problema para la función $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

Solución:
Dom $f = \mathbb{R}$ ya que $1+e^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.
La función no posee ceros ya que debiese cumplir que $1+e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = 0$ cosa que no puede ser.
Como ln y $1+e^x$ son estrictamente crecientes por álgebra de funciones, f es estrictamente creciente.
Como $1+e^x > 1 \Rightarrow f > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, luego f es positiva.
De la definición de f se tiene:

$$y = \ln(1+e^x) \Leftrightarrow e^y = e^x + 1 \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1)$$

Luego para que la ecuación tenga solución se debe cumplir que:

$$e^y - 1 > 0 \Leftrightarrow y > 0$$

Así el recorrido de f es Rec $f = \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$. Dado lo anterior la función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$$

Para la otra función se tiene que:
Dom $f = \mathbb{R}$
Para encontrar el cero debemos tener que $e^x = e^{-x} \Rightarrow x = 0$, luego $x = 0$ es el único cero.
La función es estrictamente creciente ya que e^x y $-e^{-x}$ son estrictamente crecientes.
Para ver el signo debemos resolver $f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} > 1$, lo que implica que

$x > 0$, luego f es positiva si $x > 0$ y f es negativa si $x < 0$.
Ahora queda resolver $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$$2y = e^x - e^{-x} \Leftrightarrow 2ye^x = e^{2x} - 1$$

Luego tenemos una ecuación cuadrática para e^x.

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0$$

$$e^x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 + 4}}{2}$$

Como $e^x > 0$ se descarta la solución es negativa, así:

$$e^x = y + \sqrt{y^2 + 1} \Leftrightarrow x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

y como $y + \sqrt{y^2 + 1} > 0$ para todo y, luego el recorrido es Rec $f = \mathbb{R}$, y su función inversa es:

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Esta función también es conocida por arcoseno hiperbólico.