Clase auxiliar MA12A-06 13-5-2005

Profesor auxiliar: Roberto Cortez

Sucesiones

Recordemos la definición de sucesión convergente: sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión y $\ell \in \mathbb{R}$. Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a ℓ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \qquad |a_n - \ell| < \varepsilon$$

¡Nunca olvidar esta definición!

P1 Considere las sucesiones

(i) $\dfrac{n+1}{n^4}$ (ii) $\dfrac{2n-3}{n^4+1}$ (iii) $\sqrt{\dfrac{2n+1}{n-2}} - 1$

Para cada una de ellas:

- demuestre que es convergente.
- calcule su límite.
- dado $\varepsilon = 0{,}0002$, encuentre un n_0 tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$, donde ℓ es el límite calculado.

Solución:

(i) $$\frac{n+1}{n^4} = \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^4} = \frac{1}{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Sabemos que la sucesión $\frac{1}{n} \to 0$ y que la sucesión constante en 1 converge a 1. Por álgebra de límites se tiene entonces que

$$1+\frac{1}{n} \longrightarrow 1+0=1$$

Además, también sabemos que $\frac{1}{n^3} \longrightarrow 0$, luego

$$\frac{1}{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right) \longrightarrow 0 \cdot 1 = 0 \quad \text{(por álgebra de límites)}$$

$\therefore$ $\frac{n+1}{n^4}$ converge y su límite es 0.

Busquemos un n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ $\left|\frac{n+1}{n^4} - 0\right| < 0{,}0002$

$$\left|\frac{n+1}{n^4} - 0\right| = \frac{n+1}{n^4} = \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^4} < \frac{2}{n^3} \underset{\text{imponemos}}{<} \frac{1}{5000} \quad (= 0{,}0002)$$

$$\Rightarrow \quad n^3 > 10000$$
$$\Rightarrow \quad n > \sqrt[3]{10000} > 21.54$$

Luego, para $n_0 = 22$, se tiene que $\forall n \geq n_0$

$$\left|\frac{n+1}{n^4} - 0\right| < \frac{1}{5000}$$

(ii) Propuesto.

(iii) Lo que está bajo la raíz converge a 1. Luego, uno espera que la sucesión completa converja a $\sqrt{1} = 1$.
Demostrémoslo: debemos probar que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_0$

$$\left|\sqrt{\frac{2n+1}{n-2} - 1} - 1\right| < \varepsilon .$$

Sea $\varepsilon > 0$.

$$\frac{2n+1}{n-2} \underset{\text{para } n>2}{>} \frac{2n+1}{n} > \frac{2n}{n} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2n+1}{n-2} - 1 > 1$$
$$\Rightarrow \quad \sqrt{\frac{2n+1}{n-2} - 1} > 1$$

$\therefore$ $\forall n > 2$ $\quad \left|\sqrt{\frac{2n+1}{n-2} - 1} - 1\right| = \sqrt{\frac{2n+1}{n-2} - 1} - 1$

Busquemos el n_0. Impongamos

$$\sqrt{\frac{2n+1}{n-2} - 1} - 1 < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{2n+1}{n-2} - 1} < \varepsilon + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n+1}{n-2} - 1 < (\varepsilon + 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2n+1}{n-2} < \varepsilon^2 + 2\varepsilon + 2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n+1 < (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)(n-2) + 2(n-2)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{2n}+1 < (\varepsilon^2 + 2\varepsilon)(n-2) + \cancel{2n} - 4$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{\varepsilon^2 + 2\varepsilon} + 2 < n$$

Luego, para $n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon^2+2\varepsilon} + 2 \right\rceil$ se cumple lo pedido.

Para $\varepsilon = 0.0002$, n_0 vale:

$$n_0 = \left\lceil \frac{5}{\varepsilon^2+2\varepsilon} + 2 \right\rceil = \lceil 12500.75 \rceil = 12501 \quad //$$

P2 Sea $x \in \mathbb{Q}$. Demuestre que la siguiente sucesión es convergente:

$$\cos(n!\,\pi x)$$

(recuerde que $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 2\cdot 1$)

__Solución:__ como $x \in \mathbb{Q}$, $x = \frac{p}{q}$, donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}^*$. Sea $n \geq q$

$$\Rightarrow \quad n!\,\pi x = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(q+1)\cdot\cancel{(q)}\cdot(q-1)\cdot(q-2)\cdots 2\cdot 1\cdot\pi\frac{p}{\cancel{q}}$$

$$= 2\cdot\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots(q+1)(q-1)\cdots\cdots 1\cdot p}_{:=k\,\in\,\mathbb{Z}}\;\pi$$

$$= 2k\pi$$

$\therefore$ Tomando $n_0 = q$ se cumple que $\forall n \geq n_0$ $n!\pi x$ es de la forma $2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$, luego

$$\cos(n!\pi x) = \cos(2k\pi) = 1 \quad \forall n \geq n_0$$

$$\Rightarrow \quad \cos(n!\pi x) \longrightarrow 1 \quad //$$

$\boxed{P3}$ Demuestre que la sucesión

$$\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1}$$

converge a 0.

<u>Solución:</u> observemos que no sirve separar la sucesión como

$$\frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1} = \frac{n}{n^2+1} \cdot \cos(n\pi)$$

pues $\cos(n\pi)$ no es convergente.

Haremos lo siguiente: trabajaremos con el módulo de la sucesión:

$$0 \leq \left| \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1} \right| = \left| \frac{n}{n^2+1} \right| \left| \cos(n\pi) \right|$$

$$\leq \frac{n}{n^2+1} \cdot 1 = \frac{n}{n^2+1} \longrightarrow 0$$

Luego, $\left| \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1} \right|$ está acotada por abajo por la sucesión constante en 0, la cual converge trivialmente a 0, y por arriba por la sucesión $\frac{n}{n^2+1}$, que también converge a cero. Por teorema del Sándwich

$$\Rightarrow \quad \left| \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1} \right| \longrightarrow 0$$

$$(\Rightarrow) \quad \frac{n\cos(n\pi)}{n^2+1} \longrightarrow 0 \quad \text{(por otro teorema)} \quad //$$

P4 Calcule los siguientes límites:

(i) $\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n-1}{n} \right]$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)! + 1}$

Solución:

(i) Sabemos que $\forall n \geq 1$:

$$n - 1 < n \implies \frac{n-1}{n} < 1$$

Como $\frac{n-1}{n} > 0 \implies \left[\frac{n-1}{n} \right] = 0$

Luego, el límite es igual al límite de la sucesión constante en 0. Es decir:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{n-1}{n} \right] = 0$$

(ii) Veamos:

$$0 \leq \frac{n!}{(n+1)! + 1} \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0$$

Luego, por teo. del sándwich, la sucesión converge a 0. //