

P1 Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente. Sea $s \in \mathbb{R}$ una cota superior de A . Pruebe que

$$(s \text{ es el supremo de } A) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A \text{ t.q. } s - \varepsilon \leq a)$$

Solución: Separamos la equivalencia en dos implicas.

$\Rightarrow$ Nuestra hipótesis es que s es el supremo de A ; debemos probar que $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ t.q. $s - \varepsilon \leq a$.

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario.

$$\Rightarrow s - \varepsilon < s$$

Como s es el supremo, $s \leq s'$ para cualquier s' cota superior de A , por lo tanto, $s - \varepsilon$ NO PUEDE ser cota superior de A , es decir:

$$\sim (\forall a \in A \quad a \leq s - \varepsilon)$$

o equivalentemente

$$\exists a \in A, \quad a > s - \varepsilon$$

lo cual implica que: $\exists a \in A, \quad a > s - \varepsilon$

y eso es lo que queríamos probar.

$\Leftarrow$ Ahora nuestra hipótesis es que $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ t.q. $s - \varepsilon \leq a$. Debemos probar que s es el supremo de A , lo cual significa probar dos cosas:

(i) s es cota superior de A

(ii) s es menor o igual que cualquier otra cota superior de A

lo primero es un dato del enunciado, así que sólo queda por probar (ii). Sea s' una cota superior de A . Debemos mostrar

que $s \leq s'$. Razonemos por contradicción: supongamos que $s > s'$ e intentemos contradecir algo que sabemos que es verdadero. Veamos:

$$s > s' \Rightarrow \frac{s - s'}{2} > 0$$

luego, podemos tomar $\varepsilon = \frac{s - s'}{2}$ y concluir que $\exists a \in A$ tal que $s - \varepsilon \leq a$ (eso es por hipótesis)

$$\Leftrightarrow s - \frac{(s - s')}{2} \leq a \quad (\Leftrightarrow) \quad s - \frac{s}{2} + \frac{s'}{2} \leq a$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{2} + \frac{s'}{2} \leq a$$

$$\Leftrightarrow s + s' \leq 2a$$

$$\Rightarrow s' + s' < 2a \quad (\text{pues } s > s')$$

$$\Leftrightarrow 2s' < 2a$$

$$\Leftrightarrow s' < a$$

Pero $a \in A$, lo cual contradice el hecho que s' era una cota superior de A .

Por lo tanto no puede tenerse que $s > s'$, lo que significa que necesariamente se cumple $s \leq s'$, que es lo que queríamos demostrar. //

P2 (Problema 3.i del control 1 del 2003)

Considere el conjunto A definido por

$$A = \left\{ \frac{1}{|m-n|} \mid \text{donde } n, m \in \mathbb{N}, n \neq m \right\}$$

(a) Pruebe que 1 es el máximo de A .

(b) Pruebe que 0 es el ínfimo de A . Indicación: use la propiedad arquimediana.

Solución: (a) Para probar que 1 es el máximo de A debemos probar dos cosas:

(i) 1 es cota superior de A

(ii) $1 \in A$

Problemas (i): Sea $x \in A$. Luego x se escribe como
$$x = \frac{1}{|m-n|} \quad \text{para ciertos } m, n \in \mathbb{N}, m \neq n.$$

$$\begin{aligned} \text{Como } m, n \in \mathbb{N} &\Rightarrow m - n \in \mathbb{Z} \\ &\Rightarrow |m - n| \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Además, como $m \neq n$

$$\Rightarrow |m - n| \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow |m - n| \geq 1 \quad (\text{pues } 1 \text{ es el número más chico en } \mathbb{N} \setminus \{0\})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|m - n|} \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \leq 1$$

Luego, 1 es cota superior de A .

Problemas (ii): $1 = \frac{1}{1} = \frac{1}{|1-1|} = \frac{1}{|2-1|}$, donde $2, 1 \in \mathbb{N}$ y $2 \neq 1$

$$\Rightarrow 1 \in A //$$

(b) Para probar que 0 es el ínfimo de A debemos probar dos cosas:

(i) 0 es cota inferior de A

(ii) 0 es mayor o igual a cualquier cota inferior de A .

Problemas (i): Sea $x = \frac{1}{|m-n|}$ (con $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$) un elemento cualquiera de A . Sabemos que $|m-n| > 0$, luego $\frac{1}{|m-n|} > 0$ (propiedad sabida). Es decir, $x > 0$, luego 0 es cota inferior de A .

Problemas (ii) Sea α cota inferior de A . Debemos probar que $\alpha \leq 0$. Por contradicción: si $\alpha > 0$, entonces por la propiedad arquimediana se tiene que $\exists p \in \mathbb{N}$ tal que $p\alpha > 1$, luego $\alpha > \frac{1}{p}$. Además $\frac{1}{p} = \frac{1}{|p-0|} \in A$, con lo que se concluye que α es más grande que un elemento de A , lo que contradice el hecho que α es c.i. 0.

P3 (P1 C1 2001)

Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío y acotado superiormente.

(i) Demuestre que si A satisface que

$$\forall x \in A \quad \exists y \in A \quad \text{t.q.} \quad x < y \quad (1)$$

entonces A posee supremo pero no máximo.

(ii) Demuestre que si A satisface

$$\exists y \in A, \quad \forall x \in A, \quad x \leq y \quad (2)$$

entonces A tiene máximo.

(iii) Encuentre dos intervalos en $\mathbb{R}$ que sean acotados superiormente y que verifiquen (1) y (2) respectivamente.

(iv) Pruebe que si $B \subseteq \mathbb{R}$ es un conjunto inductivo entonces satisface (1), es decir

$$\forall x \in B \quad \exists y \in B \quad x < y$$

Solución:

(i) • Veamos primero que A posee supremo: como A es acotado superiormente, por axioma del supremo se concluye que A posee supremo.

• Veamos ahora que A no posee máximo: Sea x un elemento cualquiera de $\mathbb{R}$. Veamos que x no es máximo de A . Hay dos casos:

- Si $x \notin A$, entonces x no es máximo, pues el máximo siempre es un elemento del conjunto.
- Si $x \in A$, entonces por la propiedad (1) se tiene que $\exists y \in A$ t.q. $x < y$. Es decir, x NO ES cota superior de A , luego x no puede ser máximo.

Como lo anterior vale para cualquier $x \in \mathbb{R}$, se concluye que A no posee máximo. //

(ii) Sabemos que $\exists y \in A$, $\forall x \in A$, $x \leq y$. Sea d uno de estos reales que cumplen la propiedad (2). Como $d \in A$ y como $\forall x \in A$ $d \geq x$, se concluye que d es una cota superior de A que pertenece a A , es decir, d es un máximo.

(iii) • $(-\infty, 0)$ cumple (1), pues α acotado superiormente y $\forall x \in (-\infty, 0)$ $\frac{x}{2} > x$ y además $\frac{x}{2} \in (-\infty, 0)$
• $(-\infty, 0]$ cumple (2), pues $y = 0$ cumple que $\forall x \in (-\infty, 0]$ $0 \geq x$.

(iv) Sea $x \in B$. Debemos encontrar $y \in B$ tal que $x < y$. Como B es inductivo y $x \in B$ se tendrá que $x+1 \in B$. Claramente $x < x+1$, luego $y = x+1$ cumple con lo buscado. //
