Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo
Semana 08 Axioma del Supremo
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.
Semestre Otoño 2010
Fecha: Lunes 24 de Mayo de 2010

P1.- Probar que $\inf\{\frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Solución:
Si $n = 1$ tenemos que $\frac{1}{3} \in \{\frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N}\}$, luego el conjunto es distinto de vacío, por otra parte el conjunto es acotado por 0 ya que por axiomas de los reales $\frac{1}{2n+1} > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, luego por el axioma del supremo el conjunto posee ínfimo. Asumamos por contradicción que existe un $a > 0$ tal que a es cota inferior del conjunto. Luego tenemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ $a < \frac{1}{2n+1} \Rightarrow (2n+1)a < 1$. Por la propiedad arquimidiana existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $ka > 1$,si llamamos $k = 2n+1$ (ya que si $n \in \mathbb{N}$ implica que $k \in \mathbb{N}$), tenemos $(2n+1)a > 1$. Lo que contradice que a sea cota inferior. Luego el ínfimo del conjunto es el 0.

P3.- Dados a y b reales, demuestre que si para cualquier $\epsilon > 0$ se cumple que $a \leq b+\epsilon$ entonces $a \leq b$. Para argumentar, estudie el conjunto $\{\epsilon > 0 : \epsilon \geq a - b\}$.

Solución:
Supongamos que $a > b$, luego tomamos $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Luego por hipótesis:

$$a \leq b + \epsilon = a \leq b + \frac{a-b}{2} \Rightarrow a \leq b$$

Contradicción, al suponer que $a > b$, luego $a \leq b$. Otra forma de argumentar es que el conjunto dado vemos que el ínfimo del conjunto es 0 y $a - b$ es cota inferior. Luego por definición de ínfimo $0 \geq a - b \Rightarrow a \leq b$. Ya que el ínfimo es la mayor de las cotas inferiores.

P4.- Sean S y T subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$ tales que para todo $x \in S$ y para todo $y \in T$ $x \leq y$. Probar que S tiene supremo, y que T tiene ínfimo y que $sup(S) \leq inf(T)$.

Solución:
Consideremos $y \in T$, así $\forall x \in S$ $x \leq y$ luego y es cota superior de S con lo cual S es acotado superiormente y como S es no vacío, entonces por el axioma del supremo S posee supremo. Consideremos ahora $x \in S$, así $\forall x \in S$ $x \leq y$, luego x es cota inferior de T con lo cual T es acotado inferiormente y como T es no vacío, posee ínfimo.

Probemos ahora que $sup(S) \leq inf(T)$

Sabemos que $\forall x \in S, \forall y \in T$ $x \leq y$ fijemos y, como $x \leq y$ se tiene que y es cota superior de S; pero como el supremo es la menor de todas las cotas superiores)

$$sup(S) \leq y$$

y a partir de esto se puede ver que $sup(S)$ es cota inferior de T, pero como el ínfimo es la mayor de todas las cotas superiores si $sup(S)$ es cota entonces

$$sup(S) \leq inf(T)$$

P5.- Sean A y B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$, los cuales verifican las siguientes propiedades:
(a) $A \cup B = \mathbb{R}$.
(b) Todo elemento de A es menor que todo elemento de B.
Demuestre que existe un real α que es simultáneamente cota superior de A y cota inferior de B. Pruebe, además que dicho número real es único.

Solución:
Como A es no vacío y acotado superiormente (por algún elemento de B), y además como B es no vacío y acotado inferiormente (por algún elemento de A). A posee supremo y B posee ínfimo. Sea $\alpha = sup(A)$. Vamos a probar que α es el ínfimo de B. Hay dos opciones $\alpha \in A$ ó $\alpha \in B$.

Si $\alpha \in A$, entonces α=máx (A). Veamos α es el ínfimo de B. Supongamos que $\exists \beta > \alpha$ tal que β es cota inferior de B. Como α=máx (A), entonces $\beta \in B$, pues β es mayor que α. Luego β=mín (B); por ser cota inferior del conjunto y pertenecer a él, pero qué sucede con $\frac{\alpha+\beta}{2}$?. No puede estar en A por ser mayor que el máximo, ni en B por ser menor que el mínimo. Esto es una contradicción pues se debe verificar (a). Luego α es el ínfimo de B.

Si $\alpha \in B$, veamos que α es el mínimo de B (en este caso, esto es igual a probar que α es el ínfimo, pues asumimos que $\alpha \in B$. Si α no es mínimo, entonces $\exists \beta < \alpha$. Como todo elemento de A es menor que todo elemento de B, entonces β es cota superior de A y como el supremo es la menor de las cotas superiores $\alpha \leq \beta$. Contradicción. Por lo tanto α es el mínimo de B.