Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo
Semana 07 Trigonometría
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.
Semestre Otoño 2010
Fecha: Lunes 10 de Mayo de 2010

P1.- Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\sin(2x) = \cos(\frac{x}{2})$$

Solución:
Como el seno y el coseno están desfasados en $\pi/2$ tenemos:

$$\cos(\frac{x}{2}) - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = 0$$

Así:

$$-2\sin(\frac{\pi - 3x}{4})\sin(\frac{5x - \pi}{4}) = 0$$

Luego las ecuaciones quedan:

$$\frac{\pi - 3x}{4} = k_1\pi \quad \frac{5x - \pi}{4} = k_2\pi \quad k_1, k_2 \in Z$$

Así:

$$x_1 = \frac{\pi - 4k_1\pi}{3} \quad x_2 = \frac{4k_2\pi + \pi}{5}$$

Si se iguala x_1 y x_2 a $\frac{3\pi}{5}$ se obtienen k_1, k_2 no enteros, luego $\frac{3\pi}{5}$ no es solución, es solamente ángulo coincidente.

P2.-
a) Demostrar que $\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$.
b) Utilizar lo anterior para resolver la ecuación $1 + \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$

Solución:
a) Vemos que $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos(x)\cos(y)$, si hacemos $\alpha = x + y$ y $\beta = x - y$ tenemos que $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ e $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$, reemplazando tenemos:

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos(\frac{\alpha + \beta}{2})\cos(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

b) La ecuación es equivalente a: $(\cos(0)+\cos(2x))+(\cos(x)+\cos(3x))=0$ aplicando la parte anterior tenemos:

$$2\cos(x)\cos(x)+2\cos(x)\cos(2x)=0$$

que equivale a:

$$\cos(x)(2\cos^2(x)+\cos(x)-1)=0$$

Así la solución es: $x=\pm\frac{\pi}{2}+2k_1\pi$ o $x=\pi+2k_2\pi$ o $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k_3\pi$ con $k_1,k_2,k_3\in\mathbb{Z}$

P3.- Resolver

$$\sqrt{3}\cos(x)+\sin(x)=1$$

Solución:
Dividiendo por 2, tenemos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)=\frac{1}{2}$$
$$\cos(\frac{\pi}{6})\cos(x)+\sin(\frac{\pi}{6})\sin(x)=\frac{1}{2}$$
$$\cos(x-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$$

Así la solución es:

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\quad k\in\mathbb{Z}$$

P4.- En un cuadrilátero A,B,C,D, conocemos los ángulos ABC, BCD, α y β respectivamente. Además se sabe que la longitud de los lados AB, BC y CD es 1. Probar que la longitud del cuarto lado es igual a $\sqrt{3-2\cos(\alpha)-2\cos(\beta)+2\cos(\alpha+\beta)}$.

Solución:
En el dibujo, la incógnita es c, γ es un ángulo auxiliar, y del enunciado $a=b=d=1$.
Aplicamos el teorema del seno y coseno en el triángulo BCD:

$$\frac{\sin(\gamma)}{1}=\frac{\sin(\beta)}{h}\quad(1)$$
$$h^2=2-2\cos(\beta)\quad(2)$$
$$1^2=1^2+h^2-2h\cos(\gamma)\quad(3)$$

Aplicamos el teorema del coseno en el triángulo ABD:

$$c^2=1+h^2-2h\cos(\alpha-\gamma)$$

Reemplazando (1), (2) y (3) tenemos:

$$c^2=1+2-2\cos(\beta)-2h\cos(\alpha)\cos(\gamma)-2h\sin(\alpha)\sin(\gamma)$$
$$c^2=3-2\cos(\beta)-2h\cos(\alpha)\cos(\gamma)-2\sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$c^2=3-2\cos(\alpha)-2\cos(\beta)+2\cos(\alpha+\beta)$$

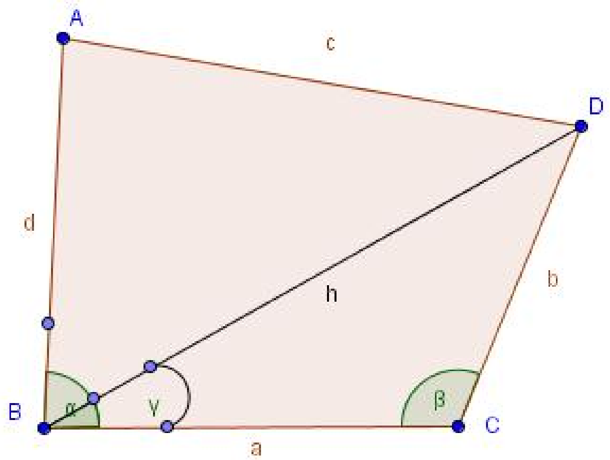

Figura 1: Figura problema 4