Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo
Semana 06 Trigonometría
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.
Semestre Otoño 2010
Fecha: Lunes 3 de Mayo de 2010

P1.- Considere la función

$$f(x) = \frac{1+\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

Encuentre dominio, signos, ceros, paridad, periocidad e inyectividad.

Solución:
Vemos que el dominio está dado por todos los reales excepto los que cumplen $\cos(x) = 1$, luego Dom f $= \mathbb{R} - \{2k\pi\}$ con $k \in Z$.
Como $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ luego $1 + \sin(x) \geq 0$ para todo real, análogamente $1 - \cos(x) > 0$, así $f \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$, luego la función es positiva.
Para obtener los ceros, debemos resolver $\sin(x) = -1$, luego, los ceros son $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Claramente $f(-x) \neq f(x)$ y $f(-x) \neq -f(x)$, luego f no es par ni impar.
Vemos que el denominador y el numerador poseen período 2π. Luego la razón de funciones de igual período conserva el período. Luego f posee período 2π. En general si el numerador posee período ω_1 y el denominador período ω_2, y si un período es múltiplo del otro, el período de la división (o multiplicación) es el período mayor. Como la función es periódica implica que no es inyectiva.

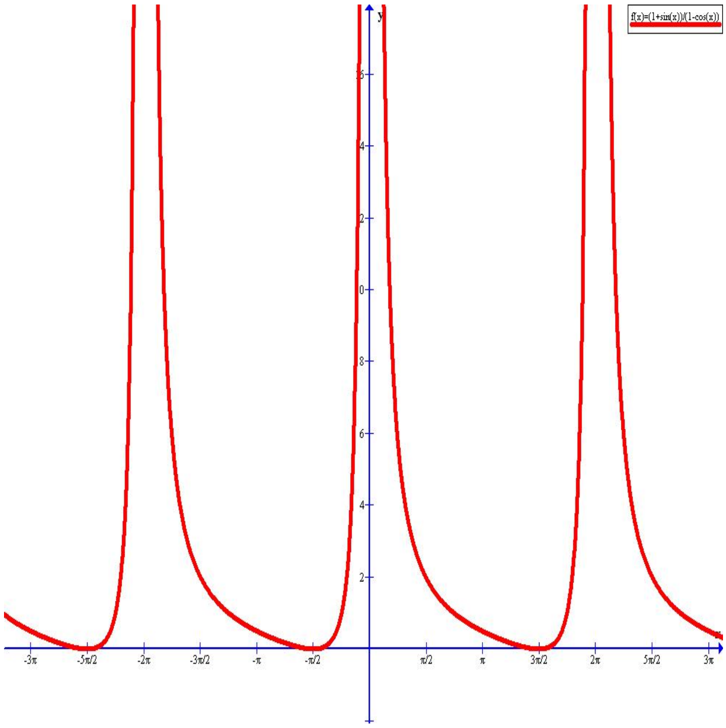

Figura 1: Problema 1

P2.-
(a) Encuentre los ceros de la función: $f(x) = \cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2}\sin(2x)$. Indicación: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
(b) Demuestre la identidad

$$\frac{1}{\tan(3x) - \tan(x)} - \frac{1}{\cot(3x) - \cot(x)} = \cot(2x)$$

Solución:
(a) Debemos resolver $f(x) = 0$ que es igual a:

$$\cos^3(x) + \sin^3(x) - 1 + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0$$

ocupando la identidad $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ y que $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ tenemos:

$$(\cos(x) + \sin(x))(1 - \sin(x)\cos(x)) - (1 - \sin(x)\cos(x)) = 0$$

$$(\cos(x) + \sin(x) - 1)(1 - \sin(x)\cos(x)) = 0$$

lo cual nos da dos ecuaciones:

$$1 - \sin(x)\cos(x) = 0 \quad \cos(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

la primera ecuación no tiene solución en los reales, ya que el producto de dos cosas menores que uno, no puede ser uno, y si una vale 1 la otra vale 0. Así resolvemos $\cos(x) + \sin(x) = 1$:

Multiplicando por $\frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Y como $\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(\pi/4) = \cos(\pi/4)$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(x) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Lo cual posee dos soluciones:

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

(b) Como $\tan(\alpha) = [\cot(\alpha)]^{-1}$, si denominamos $a = \tan(3x)$ y $b = \tan(x)$, tenemos que:

$$\frac{1}{a-b} - \frac{1}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}} = \frac{1+ab}{a-b}$$

volviendo a la variable x tenemos que

$$\frac{1+\tan(x)\tan(3x)}{\tan(3x)-\tan(x)} = \frac{1}{\tan(3x-x)} = \frac{1}{\tan(2x)} = \cot(2x)$$

P4.- Demuestre que $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ las siguientes igualdades:

1.-

$$\sin(\beta)\sin(\gamma) = \frac{1}{2}(\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma))$$

2.-

$$\sin(\beta)\cos(\gamma) = \frac{1}{2}(\sin(\beta+\gamma) + \sin(\beta-\gamma))$$