Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo

Semana 05 Funciones de Variable Real
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.
Semestre Otoño 2010
Fecha: Lunes 26 de Abril de 2010

P1.- Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$.

(a) Determine A= Dom f, recorrido y paridad.
(b) Encuentre los ceros y signos de f.
(c) Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento.
(d) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.
(e) Determine el mayor conjunto B, $B \subseteq A$=Dom f tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva y calcule $f^{-1}(x)$.
(f) Bosqueje el gráfico de f y $|f|$.

Solución:
(a) Los x que hacen posible que la función sea real son aquellos que $1 - x^2 \geq 0$, lo que es equivalente a que el Dom $f = [-1, 1]$, además como $|x| = |-x|$ y $x^2 = (-x)^2$, luego $f(x) = f(-x)$. Así f es par. Para ver el recorrido, notamos que

$$0 \leq |x| \leq 1$$

y

$$-1 \leq -\sqrt{1-x^2} \leq 0$$

con $x \in$ Dom f, así sumando las expresiones anteriores, tenemos

$$-1 \leq f(x) \leq 1$$

lo que es equivalente a Rec $f = [-1, 1]$
(b) Ya que la función es par, nos bastará analizar la función en el intervalo $[0, 1]$. Para determinar los ceros debemos resolver $f(x) = 0$, luego tenemos ($|x| = x$, ya que $x \in [0, 1]$)

$$x = \sqrt{1-x^2}$$

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ya que f es par tenemos que el otro cero es:

$$x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para ver el signo debemos resolver $f(x) \geq 0$, luego

$$x \geq \sqrt{1-x^2}$$

y aplicando un poco de álgebra tenemos que f es positiva si $x \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, aplicando la condición de paridad tenemos que:

$$f(x) \geq 0 \quad si \quad x \in \left[-1, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$$

$$f(x) \leq 0 \quad si \quad x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

(c) Por definición, sea $x_1, x_2 \in [0,1]$ tal que $x_1 < x_2$, tenemos:

$$x_1^2 < x_2^2$$

$$1 - x_1^2 > 1 - x_2^2$$

$$-\sqrt{1-x_1^2} < -\sqrt{1-x_2^2}$$

luego $-\sqrt{1-x^2}$ es creciente y como la función identidad también es creciente, la suma de funciones crecientes es creciente, tenemos que $f(x)$ es creciente si $x \in [0,1]$, luego la función es decreciente en $[-1,0]$ por paridad.
(d) La función no es sobreyectiva ya que el recorrido no es $\mathbb{R}$, y vemos que tampoco es inyectiva ya que $f(1) = f(-1)$ siendo que $1 \neq -1$, o simplemente por el hecho de ser par.
(e) Vemos que la función en $[0,1]$ es creciente por ende inyectiva, además de que el recorrido está restringido, luego la función es biyectiva en $[0,1]$ (también en $[-1,0]$), calculemos la función inversa:

$$y = x - \sqrt{1-x^2}$$

despejando x tenemos que:

$$x^2 - 2xy + y^2 = 1 - x^2$$

$$x = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 8(y^2-1)}}{4} = \frac{y \pm \sqrt{2-y^2}}{2}$$

tomando la solución positiva ya que $y \geq 0$, e intercambiando las variables, tenemos que:

$$f^{-1}(x) = \frac{x + \sqrt{2-x^2}}{2}$$

P2.- Sea $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$

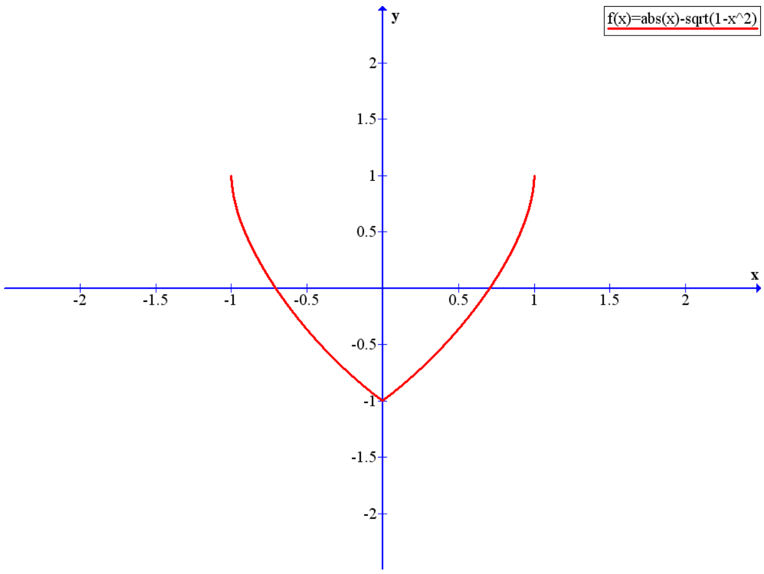

Figura 1: Gráfico f(x) pregunta 1

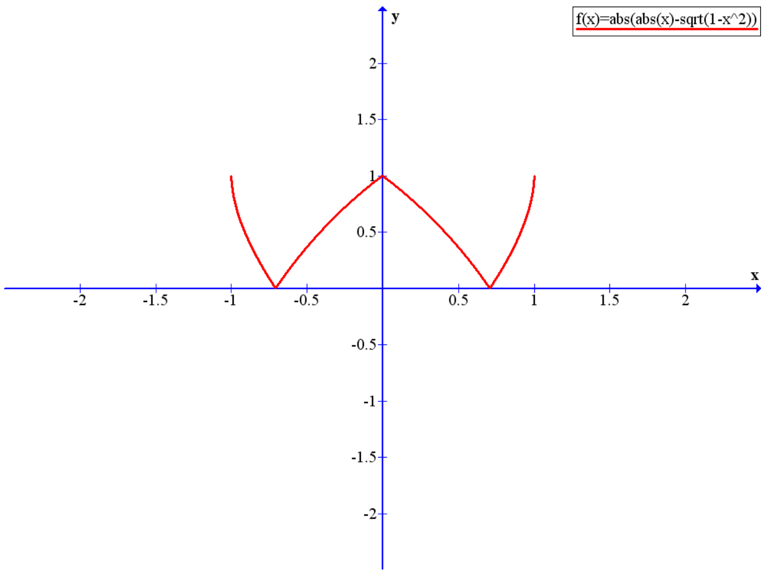

Figura 2: Gráfico |f(x)| pregunta 1

(a) Encuentre su dominio A, ceros y signos.
(b) Pruebe que f es inyectiva.
(c) Demuestre que el recorrido de f es $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$.
(d) Encuentre la función inversa de $f : A \to \mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$ y explicite su dominio y recorrido.

Solución:
(a) Claramente el dominio es $A = \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, además notamos que el único cero es por definición $f(x) = 0$ lo que es equivalente a $x = -1$, para ver donde la función es

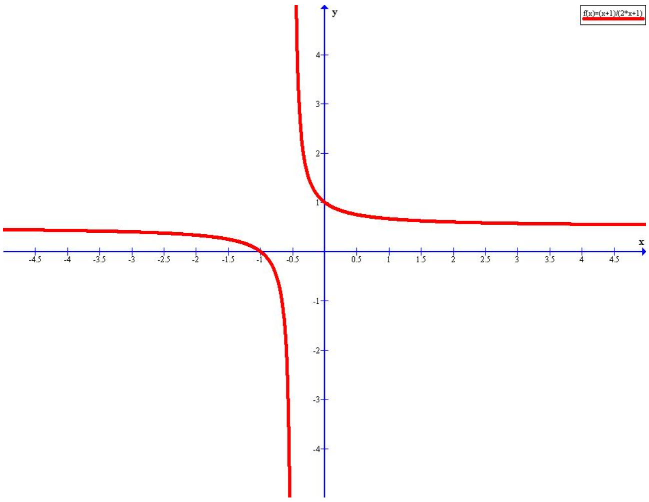

Figura 3: Gráfico de f(x) pregunta 2

positiva resolvemos la inecuación $f(x) \geq 0$ que es igual a:

$$\frac{x+1}{2x+1} \geq 0$$

resolviendo la inecuación, los x que cumplen lo anterior son: $x \in (-\infty, -1] \cup (-\frac{1}{2}, \infty)$, luego la función es negativa si $x \in [-1, -\frac{1}{2})$.
(b) Sean $x_1, x_2 \in A$. Si $f(x_1) = f(x_2)$ tenemos que:

$$\frac{x_1+1}{2x_1+1} = \frac{x_2+1}{2x_2+1}$$

$$2x_1x_2 + x_1 + 2x_2 + 1 = 2x_1x_2 + 2x_1 + x_2 + 1$$

que equivale a:

$$x_1 = x_2$$

luego f es inyectiva.
(c) y (d) Calculemos la función inversa (asumiendo que existe), debemos despejar x de $y = \frac{x+1}{2x+1}$, despejando tenemos que:

$$x = \frac{1-y}{2y-1}$$

calculando el dominio de esta función es equivalente al recorrido, el cual es: $\mathbb{R} - \{\frac{1}{2}\}$, intercambiando variables:

$$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1}$$