Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Escuela de Ingeniería.

MA1001-08 Introducción al Cálculo
Semana 04 Geometría Analítica II
Profesor: Raul Gormaz A.
Auxiliares: Carlos Duarte C. y Víctor Verdugo S.
Semestre Otoño 2010
Fecha: Lunes 19 de Abril de 2010

P1.- Por el vértice de la parábola $y^2 = 4x$ se trazan dos rectas perpendiculares que cortan en P y Q la parábola, $P \neq Q$. PQ corta el eje de simetría de la parábola en R. Probar que el foco divide al trazo OR en la razón de $1:3$.

Solución:
Sea m la pendiente de la recta que pasa por P y el origen de la parábola $O(0,0)$, luego la recta que pasa por P es $y_1 = mx$ y la que pasa por Q es $y_2 = \frac{-1}{m}x$ (ya que estas rectas son perpendiculares), intersectando y_1 e y_2 con la parábola $y^2 = 4x$ (su foco es $F(1,0)$) obtenemos las coordenadas de P y Q, las cuales son:

$$P\left(\frac{4}{m^2}, \frac{4}{m}\right) \quad Q(4m^2, -4m)$$

Luego calculamos la recta que pasa por P y Q, de la que se obtiene:

$$y = \frac{-m}{m^2-1}(x - 4m^2) - 4m$$

para obtener R intersectamos esta recta con el eje OX (que es el eje de simetría) imponiendo $y = 0$, luego la ecuación es:

$$0 = \frac{-m}{m^2-1}\left(x_R - 4m^2\right) - 4m$$

de la que resulta $x_R = 4$, entonces el punto R posee coordenadas $R(4,0)$. Para responder la pregunta notamos que $\overline{OR} = \overline{OF} + \overline{FR}$ que es equivalente a $4 = 1 + \overline{FR}$ despejando $\overline{FR} = 3$, así:

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{FR}} = \frac{1}{3}$$

P2.- Considere la ecuación de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, encontrar el punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_+$ tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x_0, y_0) como vértice y sus lados paralelos a los ejes coordenados tiene área máxima. Nota: utilice propiedades de parábolas para determinar máximo.

Solución:
Notamos que en el primer cuadrante $y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$ $(*)$ por pertenecer a la elipse, notemos que el área del rectángulo del primer cuadrante es $x_0 y_0$, así por simetría el área total del

rectángulo es $A = 4x_0y_0 = \frac{4b}{a}x_0\sqrt{a^2 - x_0^2}$, el querer maximizar A es equivalente a maximizar A^2, luego

$$A^2 = \frac{16b^2}{a^2}x_0^2(a^2 - x_0^2) = \frac{16b^2}{a^2}u(a^2 - u)$$

con $u = x_0^2$, vemos que tenemos la parábola $y(u) = ua^2 - u^2$ el cual su máximo es $u = \frac{a^2}{2}$, así $x_{0max} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ y de $(*)$ tenemos $y_{0max} = \frac{b}{\sqrt{2}}$, luego el punto es:

$$P_{max} = (\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$$

P4.- Considere la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto $P = (x_0, y_0)$ cualquiera de ella. La recta normal a la hipérbola por P corta al eje OX en A y al eje OY en B. Demuestre que P divide al trazo AB en una razón constante.

Solución:
La pendiente de la recta tangente a la hipérbola en el punto P es $m_t = \frac{b^2x_0}{a^2y_0}$, como la recta normal es perpendicular a la tangente (por definición), tenemos

$$m_n = \frac{-a^2y_0}{b^2x_0}$$

así la recta normal que pasa por P es:

$$y = \frac{-a^2y_0}{b^2x_0}(x - x_0) + y_0$$

esta recta debemos intersectarla con los ejes X (con $y = 0$) e Y (con $x = 0$), luego

$$A\left(x_0 + \frac{b^2x_0}{a^2}, 0\right) \quad B\left(0, y_0 + \frac{a^2y_0}{b^2}\right)$$

luego calculamos:

$$\frac{\overline{AP}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\frac{b^4x_0^2}{a^4} + y_0^2}{\frac{a^4y_0^2}{b^4} + x_0^2} = \frac{b^4}{a^4}$$

(esto último se logra multiplicando la fracción por $\frac{b^4}{a^4}$), luego

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} = \frac{b^2}{a^2}$$

P8.- Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La recta $y = \frac{b}{a}x$ intersecta a la elipse P y R (P de coordenadas positivas). Determinar el área del rectángulo inscrito en la elipse, que tiene como diagonal el trazo PR y cuyos lados son paralelos a los ejes coordenadas.

Solución:
Intersectando la recta con la elipse se obtiene como valor positivo $P(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}})$ luego el área es (por simetría):

$$A = 4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} = 2ab$$