MA1001: Introducción al Cálculo

Semana 1

Semestre otoño 2008

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.
- Debemos comenzar por estudiar la base de todo, es decir los números reales

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.
- Debemos comenzar por estudiar la base de todo, es decir los números reales

¿Que son los números reales?

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.
- Debemos comenzar por estudiar la base de todo, es decir los números reales

¿Que son los números reales?

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.
- Debemos comenzar por estudiar la base de todo, es decir los números reales

¿Que son los números reales?

- Es un "conjunto", con elementos y dos operaciones $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.
- Debemos comenzar por estudiar la base de todo, es decir los números reales

¿Que son los números reales?

- Es un "conjunto", con elementos y dos operaciones $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- Estas operaciones satisfacen ciertas reglas básicas llamadas AXIOMAS

¿Que estudia el cálculo?

- Estudia funciones reales de variable real.
- Debemos comenzar por estudiar la base de todo, es decir los números reales

¿Que son los números reales?

- Es un "conjunto", con elementos y dos operaciones $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
- Estas operaciones satisfacen ciertas reglas básicas llamadas AXIOMAS

Axioma

Es una regla o propiedad que admitimos como cierta sin demostración.

Axiomas de los números reales

Axiomas de Cuerpo

Son los asociados a la igualdad ($x = y$)

Axiomas de los números reales

Axiomas de Cuerpo

Son los asociados a la igualdad ($x = y$)

Axiomas de Orden

Son los asociados a la desigualdad ($x < y$)

Axiomas de los números reales

Axiomas de Cuerpo

Son los asociados a la igualdad ($x = y$)

Axiomas de Orden

Son los asociados a la desigualdad ($x < y$)

Axiomas de Completitud

Son los que marcan la diferencia entre los reales y los racionales
Son más profundos (existencia de las raices cuadradas)

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Axioma 1: Conmutatividad

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y \;=\; y + x.$$

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Axioma 1: Conmutatividad

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y = y + x.$$

b) Para el producto se cumple la misma propiedad, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot y = y \cdot x.$$

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Axioma 1: Conmutatividad

a) Cualesquiera que sean los reales x, y dados, su suma es un real independiente del orden en que se usen los dos sumandos, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x + y \;=\; y + x.$$

b) Para el producto se cumple la misma propiedad, es decir:

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}) \qquad x \cdot y \;=\; y \cdot x.$$

Axioma 2: Asociatividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x + (y + z) = (x + y) + z$

b) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Atención:

El axioma NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$.

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Atención:

El axioma NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$.

Pero esta igualdad es cierta como consecuencia de los dos aximas anteriores.

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Atención:

El axioma NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$.

Pero esta igualdad es cierta como consecuencia de los dos aximas anteriores.

En efecto, veamos el siguiente desarrollo:

$$x + (y + z) \quad = \quad x + (z + y); \qquad \text{Gracias al axioma 1}$$

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Atención:

El axioma NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$.

Pero esta igualdad es cierta como consecuencia de los dos aximas anteriores.

En efecto, veamos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + (z + y); && \text{Gracias al axioma 1} \\ &= (x + z) + y; && \text{Gracias al axioma 2.} \end{aligned}$$

Atención:

El axioma NO DICE que $x + (y + z) = (x + z) + y$.

Pero esta igualdad es cierta como consecuencia de los dos aximas anteriores.

En efecto, veamos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} x + (y + z) &= x + (z + y); && \text{Gracias al axioma 1} \\ &= (x + z) + y; && \text{Gracias al axioma 2.} \end{aligned}$$

Esta igualdad es una PROPIEDAD en $\mathbb{R}$.

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Ejercicios

Demostrar las siguientes propiedades, usando sólo los axiomas 1 y 2.

1. $(a+b)+c = (a+c)+b = (b+a)+c$
   $= (b+c)+a = (c+a)+b = (c+b)+a$.
2. $(x+y)+(z+w) = (x+w)+(z+y) = (w+y)+(x+z)$.

Ejercicios

Demostrar las siguientes propiedades, usando sólo los axiomas 1 y 2.

1. $(a+b)+c = (a+c)+b = (b+a)+c$
   $= (b+c)+a = (c+a)+b = (c+b)+a$.
2. $(x+y)+(z+w) = (x+w)+(z+y) = (w+y)+(x+z)$.

Axioma 3 : Distributividad

a) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

b**) $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})\ (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

Axioma 4 :Existencia de elementos neutros

a) En $\mathbb{R}$ existen ciertos números e tales que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todos los elementos e se llaman neutros para la suma.

Axioma 4 :Existencia de elementos neutros

a) En $\mathbb{R}$ existen ciertos números e tales que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todos los elementos e se llaman neutros para la suma.

Teorema

El elemento neutro para la suma es único.

Axiomas de Cuerpo de los Reales

Axioma 4 :Existencia de elementos neutros

a) En $\mathbb{R}$ existen ciertos números e tales que

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x + e = x.$$

Todos los elementos e se llaman neutros para la suma.

Teorema

El elemento neutro para la suma es único.

Observación

Una vez demostrado el teorema, podremos ponerle un nombre especial al único neutro aditivo. Lo llamaremos “cero” y lo anotaremos 0.

Demostración del Teorema

Demostración.

ver pizarra ..... $\square$

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 4 :Existencia de elementos neutros

b) En $\mathbb{R}$ existen ciertos números $h \neq 0$, tales que,

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot h = x.$$

Todos los elementos h que cumplen esta propiedad son neutros para el producto.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 4 :Existencia de elementos neutros

b) En $\mathbb{R}$ existen ciertos números $h \neq 0$, tales que,

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \; x \cdot h = x.$$

Todos los elementos h que cumplen esta propiedad son neutros para el producto.

Teorema

El elemento neutro para el producto es único.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 4 :Existencia de elementos neutros

b) En $\mathbb{R}$ existen ciertos números $h \neq 0$, tales que,

$$(\forall x \in \mathbb{R})\ x \cdot h = x.$$

Todos los elementos h que cumplen esta propiedad son neutros para el producto.

Teorema

El elemento neutro para el producto es único.

Observaciones

- Al único neutro para el producto lo llamaremos “uno” (1).
- El axioma dice además que $1 \neq 0$.

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 5 : Existencia de elementos inversos

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 5 : Existencia de elementos inversos

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

b) Análogamente, para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x, que satisfacen:

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Axiomas de Cuerpo de lo Reales

Axioma 5 : Existencia de elementos inversos

a) Para cada $x \in \mathbb{R}$, existen reales asociados a x, que se llaman opuestos o inversos aditivos de x, que satisfacen:

$$x + \text{opuesto}(x) = 0.$$

b) Análogamente, para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$, existen inversos multiplicativos o recíprocos de x, que satisfacen:

$$x \cdot \text{recíproco}(x) = 1.$$

Teorema

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, su elemento opuesto es único.
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, su elemento recíproco es único.

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \tag{1}$$

$$x + p_2 = 0. \tag{2}$$

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + p_1 &= 0 \qquad (1)\\ x + p_2 &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Lo que debemos probar es:

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + p_1 &= 0 \quad (1)\\ x + p_2 &= 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \tag{1}$$

$$x + p_2 = 0. \tag{2}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$p_1 = p_1 + 0 \;, \qquad \text{aquí hemos usado el axioma del E.N.}$$

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + p_1 &= 0 \qquad (1) \\ x + p_2 &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1 + \;\; 0 \;\;, && \text{aquí hemos usado el axioma del E.N.} \\ &= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado el dato } (2), \end{aligned}$$

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + p_1 &= 0 \qquad (1) \\ x + p_2 &= 0. \qquad (2) \end{aligned}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1 + \ 0\ , && \text{aquí hemos usado el axioma del E.N.} \\ &= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado el dato (2),} \\ &= (p_1 + x) + p_2, && \text{hemos usado el axioma de la Asociatividad,} \\ &= (x + p_1) + p_2, && \text{y luego el axioma de la Conmutatividad,} \end{aligned}$$

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} x + p_1 &= 0 \quad (1) \\ x + p_2 &= 0. \quad (2) \end{aligned}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned} p_1 &= p_1 + 0, && \text{aquí hemos usado el axioma del E.N.} \\ &= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado el dato } (2), \\ &= (p_1 + x) + p_2, && \text{hemos usado el axioma de la Asociatividad,} \\ &= (x + p_1) + p_2, && \text{y luego el axioma de la Conmutatividad,} \\ &= 0 + p_2, && \text{hemos usado el dato } (1), \end{aligned}$$

Demostración del Teorema

Demostración.

Sean p_1 y p_2 opuestos del mismo real arbitrario x. Ellos satisfacen las ecuaciones

$$x + p_1 = 0 \tag{1}$$

$$x + p_2 = 0. \tag{2}$$

Lo que debemos probar es:

$$\text{P.D.Q:} \qquad p_1 = p_2.$$

En efecto, usando las ecuaciones anteriores y los axiomas, tenemos que

$$\begin{aligned}
p_1 &= p_1 + 0\ , && \text{aquí hemos usado el axioma del E.N.} \\
&= p_1 + (x + p_2), && \text{aquí hemos usado el dato } (2), \\
&= (p_1 + x) + p_2, && \text{hemos usado el axioma de la Asociatividad,} \\
&= (x + p_1) + p_2, && \text{y luego el axioma de la Conmutatividad,} \\
&= 0 + p_2, && \text{hemos usado el dato } (1), \\
&= p_2 + 0, && \text{hemos usado el axioma de la Conmutatividad,} \\
&= p_2, && \text{hemos usado nuevame el axioma del E.N.}
\end{aligned}$$

$\square$

Comentarios

- La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y por lo tanto se deja propuesta como ejercicio.

Comentarios

- La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y por lo tanto se deja propuesta como ejercicio.
- Los inversos aditivos y multiplicativos de x se anotan simplemente por $-x$ y x^{-1} respectivamente.

Comentarios

- La demostración de la unicidad del inverso multiplicativo es análoga y por lo tanto se deja propuesta como ejercicio.
- Los inversos aditivos y multiplicativos de x se anotan simplemente por $-x$ y x^{-1} respectivamente.
- Con los 5 axiomas enunciados anteriormente, de dice que $\mathbb{R}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ forma un Cuerpo.
  Se anota condensadamente como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ es un Cuerpo.

Propiedad Emblemática

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Propiedad Emblemática

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

Propiedad Emblemática

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

En efecto, SI EXISTIERA.... debiera cumplir

$$0 \cdot 0^{-1} = 1 \qquad \text{y también} \qquad 0 \cdot 0^{-1} = 0,$$

de donde se obtendría $0 = 1$, lo que contradice el axioma del neutro multiplicativo.

Propiedad Emblemática

Propiedad 1

$\forall a \in \mathbb{R}$ se cumple $a \cdot 0 = 0$.

Consecuencia

Una consecuencia importante de esta primera propiedad es que

NO EXISTE EL INVERSO MULTIPLICATIVO DEL CERO.

SI ELIMINÁRAMOS la restricción $0 \neq 1$ de los axiomas, entonces en ese caso 0 tendría recíproco, PERO los reales serían un conjunto trivial reducido sólo al cero, ya que

$$\forall a, \quad a = a \cdot 1 = a \cdot 0 = 0.$$

Demostración de la propiedad 1

Demostración.

ver pizarra ..... $\square$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 2

En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \quad (a \neq 0)$

Tienen solución, y dicha solución es única.

Propiedad 2

En $\mathbb{R}$, las ecuaciones

a) $a + x = b$

b) $a \cdot x = b \ \ (a \neq 0)$

Tienen solución, y dicha solución es única.

Demostración.

ver pizarra ..... $\square$

Definiciones importantes

Las unicidades anteriores motivan las siguientes definiciones:

Definición: Diferencia y cuociente

- Llamaremos diferencia entre b y a al real $d = b + (-a)$ y se denota por $d = b - a$. Con esto, la propiedad anterior se resume en

$$a + x = b \text{ si y sólo si } x = b - a.$$

Definiciones importantes

Las unicidades anteriores motivan las siguientes definiciones:

Definición: Diferencia y cuociente

- Llamaremos diferencia entre b y a al real $d = b + (-a)$ y se denota por $d = b - a$. Con esto, la propiedad anterior se resume en
$$a + x = b \text{ si y sólo si } x = b - a.$$
- El resultado de la ecuación (b) $x = b \cdot a^{-1}$ se denomina cuociente de b por a y se denota por la fracción $x = \frac{b}{a}$, o bien por el cuociente $x = b : a$. Luego si $a \neq 0$ se tiene que:
$$a \cdot x = b \text{ si y sólo si } x = \frac{b}{a}.$$

Observaciones

1. Ley de cancelación para la suma:

$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$

Observaciones

1. Ley de cancelación para la suma:

$$a+b=a+c \text{ entonces } b=c.$$

Observaciones

1. Ley de cancelación para la suma:

$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$

2. Ley de cancelación para el producto: cuando $a \neq 0$,

$$a \cdot b = a \cdot c \text{ entonces } b = c.$$

Observaciones

1. Ley de cancelación para la suma:

$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$

2. Ley de cancelación para el producto: cuando $a \neq 0$,

$$a \cdot b = a \cdot c \text{ entonces } b = c.$$

Observaciones

1. Ley de cancelación para la suma:

$$a + b = a + c \text{ entonces } b = c.$$

2. Ley de cancelación para el producto: cuando $a \neq 0$,

$$a \cdot b = a \cdot c \text{ entonces } b = c.$$

3. Resolución de la ecuación lineal general

$$a \cdot x + b = 0, \qquad \text{donde } a \neq 0.$$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Propiedad 4 (Reglas de los signos).

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$

ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

iii) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$

iv) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

v) $a - (b + c) = a - b - c$

vi) $a - (b - c) = a - b + c$

Propiedades en $\mathbb{R}$

Propiedad 3. (Regla de los inversos)

i) $-(-a) = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$

ii) $(a^{-1})^{-1} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}^*; \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Propiedad 4 (Reglas de los signos).

i) $a \cdot (-b) = -(a \cdot b) = -ab$

ii) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

iii) $-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$

iv) $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

v) $a - (b + c) = a - b - c$

vi) $a - (b - c) = a - b + c$

Propiedad 5.

$x \cdot y = 0 \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0).$

Propiedades adicionales

1. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$ $\quad \forall a, b, c, \in \mathbb{R}$, con $b, c \neq 0$

2. $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$ $\quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$

3. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ $\quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, d \neq 0$

4. $\dfrac{a}{b} : \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bc}$ $\quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b, c, d \neq 0$

Propiedades adicionales

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
2. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$
3. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$
4. $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$
5. $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

Observación

En estas propiedades se han usado las notaciones siguientes

$$ab = a \cdot b \qquad 1 + 1 = 2, \qquad 2 + 1 = 3, \qquad 3 + 1 = 4, \qquad \text{etc.}$$

$$a \cdot a = a^2, \qquad a^2 \cdot a = a^3, \qquad a^3 \cdot a = a^4, \qquad \text{etc.}$$

Otros Cuerpos

Considere el conjunto $A = \{\heartsuit, \triangle\}$.

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las tablas siguientes

$\circ$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\triangle$	$\triangle$	$\heartsuit$

$*$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\triangle$	$\heartsuit$	$\triangle$

Otros Cuerpos

Considere el conjunto $A = \{\heartsuit, \triangle\}$.

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las tablas siguientes

$\circ$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\triangle$	$\triangle$	$\heartsuit$

$*$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\triangle$	$\heartsuit$	$\triangle$

Notemos que este conjunto con las operaciones descritas, o sea $(A, \circ, *)$, satisface todos los axiomas de cuerpo. Podemos identificar a $\circ$ con la suma, $*$ con la multiplicación, a $\heartsuit$ con 0 y a $\triangle$ con 1.

Otros Cuerpos

Considere el conjunto $A = \{\heartsuit, \triangle\}$.

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las tablas siguientes

$\circ$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\triangle$	$\triangle$	$\heartsuit$

$*$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\triangle$	$\heartsuit$	$\triangle$

Notemos que este conjunto con las operaciones descritas, o sea $(A, \circ, *)$, satisface todos los axiomas de cuerpo. Podemos identificar a $\circ$ con la suma, $*$ con la multiplicación, a $\heartsuit$ con 0 y a $\triangle$ con 1.

Usando esta identificación, ocurre que $1 + 1 = 0$, $1 + 1 + 1 = 1$, etc.

Otros Cuerpos

Considere el conjunto $A = \{\heartsuit, \triangle\}$.

En este conjunto se definen dos operaciones $\circ, *$ mediante las tablas siguientes

$\circ$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\triangle$	$\triangle$	$\heartsuit$

$*$	$\heartsuit$	$\triangle$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\triangle$	$\heartsuit$	$\triangle$

Notemos que este conjunto con las operaciones descritas, o sea $(A, \circ, *)$, satisface todos los axiomas de cuerpo. Podemos identificar a $\circ$ con la suma, $*$ con la multiplicación, a $\heartsuit$ con 0 y a $\triangle$ con 1.

Usando esta identificación, ocurre que $1 + 1 = 0$, $1 + 1 + 1 = 1$, etc.

Vemos que los axiomas de cuerpo son interesantes, pero no definen completamente al conjunto $\mathbb{R}$ que esperábamos. Este conjunto A de dos elementos satisface los mismos axiomas que $\mathbb{R}$.