Sucesiones

Nulas

Propiedades

Sea (u_n) una sucesión nula y (v_n) una sucesión acotada a *partir de algún momento* Entonces $(u_n v_n)$ es nula.

Caso especial cuando (v_n) es constante.

Traducimos la hipótesis: *a partir de algún momento* a existen a y b y $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a \leq v_n \leq b$.

Para lo que sigue es conveniente escribir lo anterior como

$$(1) \quad |v_n| \leq \max\{|a|, |b|\}.$$

Usamos la condición “ (u_n) nula” con $\epsilon' = \epsilon / (\max\{|a|, |b|\} + 1)$

Entonces $\exists n'_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n'_0,$

$$(2) \quad |u_n| \leq \epsilon'.$$

Sucesiones

Nulas

Teniamos

$$(1) \quad |v_n| \leq \max\{|a|, |b|\}.$$

y

$$(2) \quad |u_n| \leq \epsilon'.$$

Tomando $n'_0 = \max\{n_0, n'_0\}$ tenemos que (1) y (2) se cumplen simultáneamente para $n \geq n'_0$.

Entonces,

$$|u_n v_n| = |u_n| |v_n| \leq \epsilon' \max\{|a|, |b|\} = \frac{\epsilon}{\max\{|a|, |b|\} + 1} \max\{|a|, |b|\} \leq \epsilon.$$

Sucesiones

Definición

Ejercicios

- Si una sucesión $(u_n = C)$ es nula, entonces $C = 0$.
- Sean (u_n) y (v_n) dos sucesiones nulas. Entonces $\max\{u_n, v_n\}$ y $\min\{u_n, v_n\}$ son sucesiones nulas.

Sucesiones

Definición

Definición

Una sucesión (u_n) converge a $u \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |u_n - u| \leq \epsilon$$

Notación

$$(u_n) \rightarrow u.$$

Propiedad

Una sucesión (u_n) converge a $u \in \mathbb{R}$ si y sólo si $(u_n - u)$ es nula.

Sucesiones

Definición

Propiedad

$(u_n) \rightarrow u$ entonces (u_n) es acotada.

$(u_n) \rightarrow u$ si y sólo si $(u_n - u)$ es nula.

$(u_n - u)$ nula $\Rightarrow (u_n - u)$ acotada: existen a y b tales que para todo n

$$a \leq u_n - u \leq b$$

Sucesiones

Definición

Propiedad

$(u_n) \rightarrow u$ y $(u_n) \rightarrow v$ entonces $u = v$.

$$u - v = (u - u_n)u_n - v).$$

Definición: límite de la sucesión

Sea (u_n) convergente. Al único real u que satisface $(u_n) \rightarrow u$ lo denotamos por

$$\lim u_n$$

y lo llamamos el *límite* de la sucesión.

Sucesiones

Algebra

Algebra: Sean $(u_n) \rightarrow u$ y $(v_n) \rightarrow v$

- $(u_n + v_n) \rightarrow u + v$.
- $(u_n v_n) \rightarrow uv$.

Aplicando que $(u_n - u)$ y $(v_n - v)$ son (?) en

$$(u_n + v_n - (u + v)) = (u_n - u) + (v_n - v)$$

se concluye que la sucesión $u_n + v_n - (u + v)$ es (?). Entonces $(u_n + v_n) \rightarrow u + v$.

Aplicando que $(u_n - u)$ y $(v_n - v)$ son (?), y que (v_n) es (?) en

$$(u_n v_n - uv) = (u_n - u)v_n + u(v_n - v).$$

se concluye que la sucesión $u_n v_n - (uv)$ es (?). Entonces $(u_n v_n) \rightarrow uv$.

Sucesiones

Recíproca

Propiedad. Sea $(u_n) \rightarrow u$.

- Si $u > 0$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$

$$\frac{u}{2} \leq u_n \leq \frac{3u}{2}.$$

- Si $u < 0$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$

$$\frac{3u}{2} \leq u_n \leq \frac{u}{2}.$$

Tomando $\epsilon = (?)$ en la definición de $(u_n) \rightarrow l$ se tiene que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$,

$$|u_n - u| \leq \epsilon$$

De aquí la conclusión es inmediata.

Sucesiones

Recíproca

Propiedad. Sea $(u_n) \rightarrow u$.

Si $u \neq 0$, entonces $(\frac{1}{u_n})$ es una sucesión. Además, $(\frac{1}{u_n}) \rightarrow \frac{1}{u}$.

La propiedad anterior muestra que $|3u/2| \geq |u_n| \geq |u/2| > 0$ a partir de un n_0 . Entonces, $\frac{1}{u_n}$ está definida a partir de n_0 y es acotada:

$$|2/(3u)| \leq \frac{1}{|u_n|} \leq |2/u|.$$

Como $(u_n) \rightarrow u$, al aplicar las propiedades algebraicas en

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u} = (u - u_n) \frac{1}{u \cdot u_n}$$

se concluye que $\frac{1}{u_n} \rightarrow \frac{1}{u}$