Sucesiones

Definición

Definición

Una función $a : A \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una sucesión si $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $n \in A$.

Relativo a las propiedades de funciones ya vistas son relevantes:

- Dominio: (6).
- Acotamiento: (6).
- Álgebra: suma, producto, cuociente (6).
- Monotonía: crecimiento, decrecimiento (5).
- Álgebra: composición (4).
- Periodicidad: (2).
- Ceros, signos: (1)
- Simetrías: paridad, imparidad: (0).
- Inyectividad, Sobreyectividad, Biyectividad (0).

Sucesiones

Ejemplos

Tomar una función con $A := dom(f) \cap \mathbb{N}$ cumpliendo $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0$, $n \in A$.

- $ax + b \rightarrow an + b$.
- $ax^2 + bx + c \rightarrow an^2 + bn + c$.
- $\frac{1}{ax+b} \rightarrow \frac{1}{an+b}$.
- $\frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow \frac{an+b}{cn+d}$.
- $|x| \rightarrow |n|$.
- $|\frac{1}{x}| \rightarrow |\frac{1}{n}|$.
- $\sqrt{\frac{1}{x}} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{n}}$.
- $sen(x) \rightarrow sen(n)$.
- $tan(\frac{2}{x}) \rightarrow tan(\frac{2}{n})$.
- $\lfloor \frac{1}{x^2} \rfloor \rightarrow \lfloor \frac{1}{n^2} \rfloor$.

Ejercicio: Dé dos ejemplos más de sucesiones.
$a_n = \frac{1}{sen(n\pi/2)}$ no es una sucesión, pues su dominio es el conjunto (?).
Ejercicio: Dé dos ejemplos de funciones que no son sucesiones.

Sucesiones
Notaciones, restricciones

Usualmente, las sucesiones se denotan con las letras, a, s, u, v, w.
En lugar de $a(n)$ se simplifica a a_n.
En lugar de $a : A \to \mathbb{R}$ se simplifica $(a_n)_{n\in A}$.

La expresión lógica:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, P(n)$$

debe entenderse como que la propiedad $P(n)$ es cierta para todo natural, salvo por un conjunto finito de ellos.

También puede leerse como que $P(n)$ es cierta *a partir de* n_0.

Entonces, para que una función $(a_n)_{n \in A}$ sea sucesión debe ocurrir que todos los naturales estén en A salvo un conjunto finito de ellos.

Con lo dicho antes también podemos decir que *a partir de* n_0, todos los naturales están en A.

$$(*) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, P(n, \epsilon)$$

Consideremos $P(n, \epsilon) : n^2 \geq \epsilon(n+1)$.
¿Es cierta (*) para $P(n, 3)$? Sí. Para $n_0 = 4$.
¿Es cierta (*) para $P(n, 10)$? Sí. Para (?)
¿Para cuáles $\epsilon > 0$, $P(n, \epsilon)$ satisface (*)?

Consideremos ahora $P(n, \epsilon) : 1/n \leq \epsilon$.

¿Satisface $P(n, 1/7)$ (*)?
Sí. Para (?)
¿Satisface $P(n, 1/1000)$ (*)?
Sí. Para $n_0 = 1000$.
¿Para cuáles $\epsilon > 0$, $P(n, \epsilon)$ satisface (*)?

Sucesiones

Nulas

Definición

Una sucesion $(a_n)_{n\in A}$ es nula si

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n| \leq \epsilon$$

Es decir, para todo $\epsilon > 0$, la propiedad $P(n,\epsilon) : |a_n| \leq \epsilon$, es cierta a partir de algún n_0.

Las siguientes son sucesiones nulas.

- $a_n = 0, n \in \mathbb{N}$.
- $a_n = \lfloor \frac{10^{10}}{n} \rfloor$.
- $a_n = \frac{1}{n}$.
- $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
- $a_n = sen(\frac{1}{n})$.

Ejercicio: Jusfique el primer y segundo caso.

Definición

Una sucesion $(a_n)_{n \in A}$ es nula si $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n| \leq \epsilon$

$a_n = \frac{1}{n}$.
Para demostrar que $(1/n)$ es nula debemos ver que se cumple la definición.
Esta verificación puede entenderse como un juego con dos participantes.
El que juega primero elige un valor positivo $\epsilon > 0$.
El segundo jugador debe responder con un número natural n_0.
La sucesión es nula cuando existe una manera en la cual el segundo jugador siempre gana.

Sucesiones

Nulas

Definición

Una sucesion $(a_n)_{n \in A}$ es nula si

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |a_n| \leq \epsilon$$

$a_n = \frac{1}{n}$.
Veamos que el segundo jugador siempre gana cuando responde:
$n_0 = \lfloor 1/\epsilon \rfloor + 1$.
En efecto,

$$\begin{aligned} n \geq n_0 &\Leftrightarrow n \geq \lfloor 1/\epsilon \rfloor + 1 \\ &\Rightarrow n > 1/\epsilon \\ &\Leftrightarrow 1/n < \epsilon \\ &\Rightarrow 1/n \leq \epsilon \end{aligned}$$

Sucesiones

Nulas

Propiedades

- (a_n) es nula si y sólo si $|a_n|$ es nula.
- La suma y el producto de dos sucesiones nulas es nula.
- La suma y el producto de dos sucesiones acotadas es acotada.

Sucesiones

Nulas

Propiedades

Una sucesión nula es acotada.

Sucesiones

Nulas

Propiedades

Sean (a_n) y (u_n) sucesiones tales que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $|a_n| \leq |u_n|$. Si (u_n) es nula entonces (a_n) es nula.

Propiedades

El producto de una sucesión nula por una acotada es nula.

Sucesiones

Divergencia (I)

Definición

Una sucesión (a_n) diverge a (más) infinito si

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, a_n \geq M.$$

- (n).
- $(\sqrt{n})$.
- $(\frac{1}{sen(1/n)})$.

Propiedades

Sea (a_n) una sucesión tal que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0\ a_n \neq 0$. Entonces a_n es nula si y sólo si $\frac{1}{a_n}$ diverge a infinito.

Sucesiones

Divergencia (I)

Propiedad

Sea (u_n) una sucesión que diverge a infinito y tal que $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0,\ u_n \in \mathbb{N}$. Si (a_n) es una sucesión nula entonces a_{u_n} es una sucesión nula. Si (a_n) es una diverge a infinito entonces a_{u_n} diverge a infinito.

- $(sen(1/n^3))$.
- $(\frac{1}{\sqrt{n+10}})$.
- $(\sqrt{\lfloor \frac{1}{sen(1/n)} \rfloor})$.

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $h > -1$,

$$(1+h)^n \geq 1 + nh$$

- Para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo a,

$$1 + \frac{a}{n} \geq \sqrt[n]{a}$$