Número Enteros

Intercalados

Propiedad

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, si $x > y + 1$ entonces existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $x > p > y$.

Dem:

Si $x \in \mathbb{Z}$ entonces $p = x - 1$ sirve.

Si $x \notin \mathbb{Z}$ entonces $p = \lfloor x \rfloor$.

Esto nos dice que todo intervalo abierto de largo mayor que 1 contiene al menos un entero.

En la lectura que sigue DEBERÍA poder determinar los valores de (?) sin demasiada dificultad.

Otros conjuntos

Naturales y Racionales

Definición: Naturales $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{p \in \mathbb{Z} : p \geq 0\}$$

Propiedad

$\mathbb{N}$ no es acotado superiormente.

Dem: Si lo fuera tendría máximo m. Pero, (?) $\in \mathbb{N}$ y es mayor que m.

Propiedad arquimediana

Para todo $M > 0$ y $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n\epsilon > M$.

Dem: (?) no es cota superior de $\mathbb{N}$.

Otros conjuntos

Racionales

Definición: Los racionales $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{n} : p, n \in \mathbb{Z}, n > 0\}$$

Propiedad: $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ existe $r \in \mathbb{Q}$, $x < r < y$.

Dem:

Aplicando propiedad arquimediana para $M = 1$ y $\epsilon = (?)$ se obtiene $n \in \mathbb{N}$ tal que $n(y - x) > 1$.

El intervalo (nx, ny) tiene largo mayor que 1. Entonces existe $p \in$ (?)

Tomando $r = \frac{p}{n}$ se cumple que $r \in \mathbb{Q}$ y $y > r > x$.

Supremo e Ínfimo

Propiedad. Para $A \subseteq \mathbb{R}$, $t \in cs(A), l \in ci(A)$ se cumple:

- $t = \sup(A)$ si y sólo si $\forall \epsilon > 0\ \exists x \in A$, $x > t - \epsilon$
- $l = \inf(A)$ si y sólo si $\forall \epsilon > 0\ \exists x \in A$, $x < l + \epsilon$

Dem:

$(\Rightarrow)$

$$\begin{aligned} t = \sup(A) \quad &\Rightarrow \quad t\ (?)\ \min(cs(A)) \\ &\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0, t - \epsilon\ (?)\ cs(A) \\ &\Rightarrow \quad \forall \epsilon > 0, \exists x \in A, x\ (?)\ t - \epsilon \end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ Sea $t' = \sup(A)$. Si $t' < t$ entonces $t' < \frac{t'+t}{2} < t$. Para $\epsilon' = (?)$ se cumple que:

$$t' < t' + \epsilon' = \frac{t' + t}{2} = t - \epsilon' < t.$$

Estamos suponiendo que para $\epsilon > 0\ \exists x \in A$, $x > t - \epsilon$. Entonces, $\exists x \in A, x\ (?)\ t'$.

La segunda propiedad queda de ejercicio.

Supremo e Ínfimo

Ejercicios

Para los siguientes conjuntos determine supremos, ínfimos, máximos y mínimos cuando existan.

- $A = \{\frac{1}{x} : x > 0\}$.
- $A = \{1 - \frac{1}{x} : x > 0\}$.
- $A = \{\frac{1}{x} : x > 0, x \in \mathbb{N}\}$.
- $A = \{\frac{x+y}{xy} : x, y > 0, x, y \in \mathbb{N}\}$.

Propiedades

Subconjuntos

Propiedad: Para A, B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$

- $cs(B) \subseteq cs(A) \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(B)$.
- $ci(B) \subseteq ci(A) \Rightarrow \inf(A) \geq \inf(B)$.
- $A \subseteq B \Rightarrow cs(B) \subseteq cs(A)$ y $ci(B) \subseteq ci(A)$.

Definición: Para A subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$

$$-A = \{-x : x \in A\}.$$

Se cumple que

- $cs(-A) = -ci(A)$.
- $ci(A) \neq \emptyset \Rightarrow \sup(-A) = -\inf(A)$.

Propiedades

Subconjuntos

Definición: Para A, B subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$

$$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}.$$

Se cumple que

- $cs(A) + cs(B) \subseteq cs(A + B)$.
- $ci(A) + ci(B) \subseteq ci(A + B)$.
- $\sup(A) + \sup(B) \geq \sup(A + B)$.
- $\inf(A) + \inf(B) \leq \inf(A + B)$