Función exponencial

Se define la función exponencial por

$$\exp(x) := \lim(1 + \frac{x}{n})^n$$

Para $x = 1$, $\exp(1) = e$.

- Dominio.
- Ceros y signos.
- Propiedad Algebraica.
- Crecimiento.
- Biyectividad.

Propiedad

Para todo $x \in \mathbb{R}$, la sucesión

$$(s_n) = ((1 + \frac{x}{n})^n)$$

converge.

- Creciente a partir de un n_0.
- Acotada superiormente.

Sucesión Creciente

Para todo $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $(1+\frac{x}{n})^n)$ es creciente a partir de un n_0.

$$
\begin{aligned}
\frac{s_{n+1}}{s_n} &= \frac{(1+\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(1+\frac{x}{n})^n} &&= \frac{(n+1+x)^{n+1}n^n}{(n+1)^{n+1}(n+x)^n} \\
&= (\frac{n+x}{n})\frac{((n+1+x)n)^{n+1}}{(n+1)^{n+1}(n+x)^{n+1}} &&= (\frac{n+x}{n})(\frac{n^2+n+nx}{n^2+n+nx+x})^{n+1} \\
&= (\frac{n+x}{n})(1-\frac{x}{(n+1)(n+x)})^{n+1} &&\geq (\frac{n+x}{n})(1-\frac{x(n+1)}{(n+1)(n+x)}) \\
&= (\frac{n+x}{n})\frac{n}{n+x}
\end{aligned}
$$

Acotamiento Superior

Para todo $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $(1+\frac{x}{n})^n)$ es acotada superiormente.

$$\begin{aligned}(1+\frac{x}{kn})^n &\leq \frac{1}{1-n\frac{x}{kn}} \\ &= \frac{k}{k-x}\end{aligned}$$

Entonces,
$s_n \leq s_{kn} \leq (\frac{k}{k-x})^k$.

Algebra

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$$

$$\frac{(1+\frac{x+y}{n})^n}{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n} = (1 - \frac{xy}{(n+x)(n+y)})^n \to 1.$$

$$(1+\frac{x+y}{n})^n = \frac{(1+\frac{x+y}{n})^n}{(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n}(1+\frac{x}{n})^n(1+\frac{y}{n})^n$$

Algebra

Para todo x,

$$\exp(kx) = \exp(x)^k.$$

$$exp(x) = (\exp(x/2))^2 \geq 0.$$

$$\exp(-x)\exp(x) = 1.$$

$$\exp(x) > 0.$$

$$\exp(x/k) = \sqrt[k]{\exp(x)}.$$

Desigualdad

Para todo x,

$$\exp(x) \geq 1 + x.$$

Para todo $x > -1$,

$$\exp(x) \leq \frac{1}{x-1}.$$

$$\exp(x) \geq (1 + \frac{x}{n})^n \geq 1 + n\frac{x}{n}$$

$x < 1$ entonces $1 - x > 0$.

$$\frac{1}{1-x} \leq \exp(x)$$

Exponencial
Crecimiento

Propiedad

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y \Rightarrow$

$$\exp(x) < \exp(y)$$

$$\exp(y) = \exp(x)\exp(y-x) \geq (1 + y - x)\exp(x) > \exp(x)$$

Propiedad

Si $\lim a_n = a$ entonces

$$\exp(a_n) \to \exp(a)$$

.

$$1 + a_n - a \leq \exp(a_n - a) \leq \frac{1}{1-(a_n - a)}$$

Propiedad

$$\lim \exp(-n) = 0$$

.

$\lim \exp(-n) = \lim \frac{1}{\exp(n)} = \frac{1}{e^n}$.

Exponencial

Biyectividad

Propiedad

La función *exp* : $\mathbb{R} \to (0, \infty)$ es biyectiva. Su inversa se llama logaritmo natural y se denota $\ln(x)$.

Inyectiva: est. creciente.
Sobreyectiva: Para todo $y > 0$ existe $x \in \mathbb{R}$ con $\exp(x) = y$.
Veremos que el supremo del conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{R} : \exp(z) \leq y\}$$

cumple $\exp(sup(A)) = y$.

Exponencial

Sobreyectividad

Propiedad

El conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{R} : \exp(z) \leq y\}$$

tiene supremo.

Los argumentos usan que $\lim \exp(-n) = 0$.

A es no vacío: Para $y > 0$, existe n_0 tal que $\exp(-n_0) \leq y$.

$cs(A)$ es no vacío: Para $1/y > 0$, existe n_0 tal que $\exp(-n_0) \leq 1/y$.

$n_0 \in cs(A)$: Para $z \in A$, $\exp(z) \leq y \leq \exp(n_0)$. Luego, $z \leq n_0$.

Propiedad

El supremo del conjunto

$$A = \{z \in \mathbb{R} : \exp(z) \leq y\}$$

cumple $\exp(\sup(A)) = y$.

Sea $s = sup(A)$.
$s - 1/n < s, \ \Rightarrow z \in A, s - 1/n < z$.

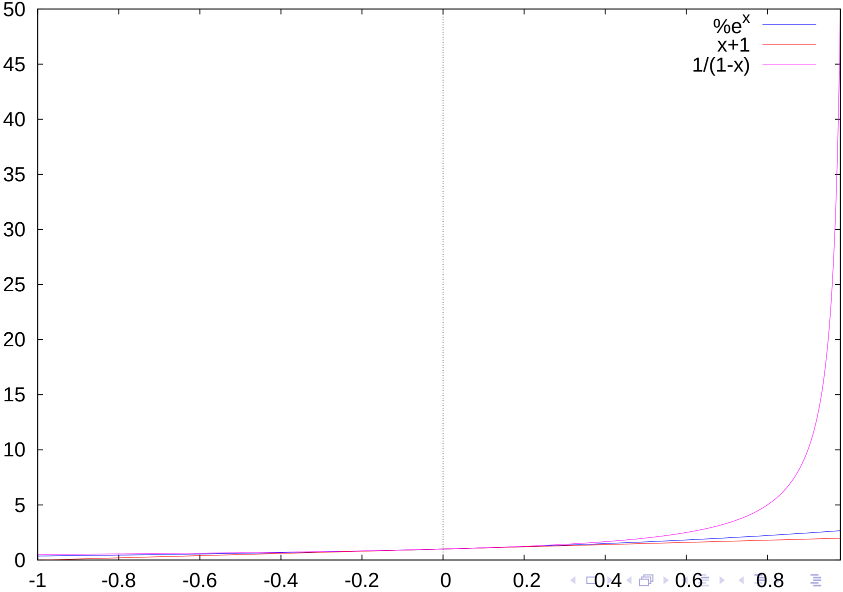
$s + 1/n \notin A, \ \Rightarrow y < \exp(s + 1/n)$.

$$\exp(s - 1/n) \leq \exp(z) \leq y < \exp(s + 1/n)$$

$\exp(s - 1/n) = \exp(s)\exp(-1/n)$ y $\exp(s + 1/n) = \exp(s)\exp(1/n)$.
Entonces, $\exp(s) = y$.

Exponencial

Gráficos



Exponencial

Gráficos