

Sucesiones

Orden

Propiedades

Si $(z_n) \rightarrow z$ y $z_n \geq 0$ a partir de algún momento, entonces $z \geq 0$.

Traducimos la hipótesis: a partir de algún momento a existen $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,
 $\forall n \geq n_0, 0 \leq z_n$

Sucesiones

Orden

Propiedades

Si $(z_n) \rightarrow z$ y $z_n \geq 0$ a partir de algún momento, entonces $z \geq 0$.

Traducimos la hipótesis: a partir de algún momento a existen $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,
 $\forall n \geq n_0, 0 \leq z_n$

Si $z < 0$ sabemos que $\exists n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(?) \leq z_n \leq (?)$ que es una contradicción.

Sucesiones

Orden

Propiedades

Si $(z_n) \rightarrow z$ y $z_n \geq 0$ a partir de algún momento, entonces $z \geq 0$.

Traducimos la hipótesis: a partir de algún momento a existen $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,
 $\forall n \geq n_0, 0 \leq z_n$

Si $z < 0$ sabemos que $\exists n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(?) \leq z_n \leq (?)$ que es una contradicción.

Propiedades

Si $(u_n) \rightarrow u$, $(v_n) \rightarrow v$ y $v_n \geq u_n$ a partir de algún momento, entonces $u \geq v$.

Sucesiones

Orden

Propiedades

Si $(z_n) \rightarrow z$ y $z_n \geq 0$ a partir de algún momento, entonces $z \geq 0$.

Traducimos la hipótesis: a partir de algún momento a existen $\exists n_0 \in \mathbb{N}$,
 $\forall n \geq n_0, 0 \leq z_n$

Si $z < 0$ sabemos que $\exists n'_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(?) \leq z_n \leq (?)$ que es una contradicción.

Propiedades

Si $(u_n) \rightarrow u$, $(v_n) \rightarrow v$ y $v_n \geq u_n$ a partir de algún momento, entonces $u \geq v$.

Tomamos $z_n = (?)$ y $z = (?)$.

Algebra de límites $\Rightarrow (z_n) \rightarrow z$.

Lo anterior $\Rightarrow z \geq 0$.

Sucesiones

Sandwich

Propiedades

Si $(u_n) \rightarrow u$, $(v_n) \rightarrow u$ y (w_n) cumple $v_n \geq w_n \geq u_n$ a partir de algún momento, entonces $(w_n) \rightarrow u$.

Sucesiones

Sandwich

Propiedades

Si $(u_n) \rightarrow u$, $(v_n) \rightarrow u$ y (w_n) cumple $v_n \geq w_n \geq u_n$ a partir de algún momento, entonces $(w_n) \rightarrow u$.

Tenemos que $0 \leq w_n - u_n \leq v_n - u_n$ y que $(v_n - u_n)$ es (?)

Sucesiones

Sandwich

Propiedades

Si $(u_n) \rightarrow u$, $(v_n) \rightarrow u$ y (w_n) cumple $v_n \geq w_n \geq u_n$ a partir de algún momento, entonces $(w_n) \rightarrow u$.

Tenemos que $0 \leq w_n - u_n \leq v_n - u_n$ y que $(v_n - u_n)$ es (?)

En esta situación sabemos que $(w_n - u_n)$ es (?).

Sucesiones

Sandwich

Propiedades

Si $(u_n) \rightarrow u$, $(v_n) \rightarrow u$ y (w_n) cumple $v_n \geq w_n \geq u_n$ a partir de algún momento, entonces $(w_n) \rightarrow u$.

Tenemos que $0 \leq w_n - u_n \leq v_n - u_n$ y que $(v_n - u_n)$ es (?)

En esta situación sabemos que $(w_n - u_n)$ es (?).

Entonces, como $w_n = (w_n - u_n) + u_n$, concluimos que $(w_n) \rightarrow u$.

Sucesiones

Desigualdad de Bernoulli

Bernoulli (I)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h > -1, (1 + h)^n \geq 1 + nh$$

Aplique Bernoulli (I) para un h adecuado y obtenga

$$0 \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{1+2n}, \quad 1 \leq \sqrt[n]{10} \leq 1 + \frac{9}{n}$$

Use lo anterior y propiedades vistas para obtener

$$0 \leq \left(\frac{n+1}{3n-8}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad \sqrt[n]{10} \leq \sqrt[n]{\frac{n-n^3+20n^4}{1+2n+n^4}} \leq \sqrt[n]{100}$$

Ejercicio

Calcule el límite de $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\left(\frac{n+1}{3n-8}\right)^n$, $(\sqrt[n]{10})$ y $\left(\sqrt[n]{\frac{n-n^3+20n^4}{1+2n+n^4}}\right)$

Sucesiones

Desigualdad de Bernoulli

Bernoulli (II)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall h > 0, (1 + h)^n \geq 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2$$

Aplique Bernoulli (II) para un h adecuado y obtenga

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq 1 + \frac{2}{\sqrt{n}} \qquad 0 \leq n\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{n}{1 + 2n + 2n(n-1)}$$

Ejercicio

Calcule el límite de $(\sqrt[n]{n})$, $(\sqrt[n]{n^{100}})$, $(n(\frac{1}{3})^n)$ y $(n^{100}(\frac{1}{\sqrt[100]{\frac{1}{3}}})^n)$