# Definición

## Cotas de conjuntos

### Definición: Para $A \subseteq \mathbb{R}$.

- $M \in \mathbb{R}$ es cota superior de $A$ si: $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ es cota inferior de $A$ si:$\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow m \leq x$.

### Definición: Para $A \subseteq \mathbb{R}$.

- $A$ es acotado superiormente si admite una cota superior.
- $A$ es acotado inferiormente si admite una cota inferior.
- $A$ es acotado si es acotado superior e inferiormente.

Notación:

- $cs(A)$ conjunto de las cotas superiores de $A$.
- $ci(A)$ conjunto de las cotas inferiores de $A$.

**Definición: Para $A \subseteq \mathbb{R}$.**

- $M \in A$ es máximo de $A$ si: $\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow x \leq M$.
- $m \in A$ es mínimo de $A$ si:$\forall x \in \mathbb{R}, x \in A \Rightarrow m \leq x$.

Ejercicio: Demuestre que cada conjunto tiene a lo más un máximo y a lo más un mínimo.

Notación:

- $\max(A)$.
- $\min(A)$.

# Definición

## Máximos y Mínimos de conjuntos

### Problema

Para $a < b$, demuestre que los intervalos $[a, b)$, $(a, b)$ y $(-\infty, b)$ NO tienen máximo y que los intervalos $(a, b)$, $(a, b]$ y $(a, \infty)$ NO tienen mínimo.

# Definición

## Supremos e Ínfimos de conjuntos

**Definición: Para $A \subseteq \mathbb{R}$.**

- $s \in \mathbb{R}$ es supremo de $A$ si $s = \min(cs(A))$.
- $i \in \mathbb{R}$ es ínfimo de $A$ si $i = \max(ci(A))$.

Un conjunto tiene a lo más un supremo y a lo más un ínfimo.
Notación:

- $\sup(A) = \min(cs(A))$.
- $\inf(A) = \max(ci(A))$.

Ejercicio: Determinar supremo e ínfimo de los intervalos.

### Axioma del supremo

Todo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$ y acotado superiormente admite supremo.

Para $A \neq \emptyset$, $cs(A) \neq \emptyset \Rightarrow min(cs(A))$ existe.

# Axioma del supremo (AxS)

## Raíces

**Para $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$**

$(\sup(A))^2 = 2$.

- $A$ es no vacío: $1 \in A$.
- $cs(A)$ es no vacío: $10 \in cs(A)$. Para $x > 10$ sabemos que $x^2 > 100$.

AxS $\Rightarrow \sup(A)$ existe. Vamos a probar que para $s \geq 0$,

- Si $s^2 > 2$ entonces $s > \sup(A)$.
- Si $s^2 < 2$ entonces $s \notin cs(A)$.

**Para $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$**

Si $b > 0$ satisface $b^2 \geq 2$ entonces $b \in cs(A)$.

Si $x > b$ entonces $x^2 > b^2$.

$b^2 \geq 2 \Rightarrow x^2 > 2$.

Hemos probado: $x > b \Rightarrow x \notin A$.

Que equivale a $x \in A \Rightarrow x \leq b$.

# Axioma del Supremo

## Raíces

**Para $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 2\}$**

Si $b > 0$ satisface $b^2 > 2$ entonces $b > sup(A)$.

Veremos que existe $c$ positivo y menor que $b$ tal que $c^2 > 2$. Por lo anterior $c$ es una cota superior de $A$ menor que $b$ y entonces $b > \sup(A)$.

# Axioma del Supremo

## Raices

Para $A = \{x \geq 0 : x^2 \leq 2\}$

$b^2 < 2 \Rightarrow b \notin cs(A)$.

- Bastará con encontrar $c > b$ con $c^2 \leq 2$.

# Números Enteros

## Definición

### Los enteros

Al conjunto $\mathbb{Z}$ que cumple

(Z1) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + 1 \in \mathbb{Z}$ y $x - 1 \in \mathbb{Z}$.

(Z2) Para todo $x \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow (x, x + 1) \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

(Z3) $0 \in \mathbb{Z}$

se le llama conjunto de los enteros.

Informalmente el conjunto de enteros $\mathbb{Z}$ es

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$$

### Prop:

Para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, si $x > y$ entonces $x \geq y + 1$.

## Propiedad

$\mathbb{Z}$ no es acotado superiormente.

Dem:

Supongamos que es acotado superiormente.

Como no es vacío ($0 \in \mathbb{Z}$) el $(AxS)$ implica que $\mathbb{Z}$ tiene supremo $s$.

Como $s - \frac{1}{2}$ no es cota superior de $\mathbb{Z}$ existe $p \in \mathbb{Z}$ con $p > s - \frac{1}{2}$.

Pero, $p + 1 \in \mathbb{Z}$ y $p + 1 > s$.

## Propiedad

$A \subseteq \mathbb{Z}$, no vacío y acotado superiormente tiene máximo.

Dem:

> ($AxS$) implica que $A$ tiene supremo $s$.
>
> Como $s - \frac{1}{2}$ no es cota superior de $A$ existe $p \in A$ con $p > s - \frac{1}{2}$. Ejercicio: Demuestre que $p$ es el máximo de $A$, probando que $x > p \Rightarrow x \notin A$.

# Números Enteros

## Propiedades

### Ejercicio

Demuestre las siguientes propiedades

- $\mathbb{Z}$ no es acotado inferiormente.
- $A \subseteq \mathbb{Z}$ no vacío y acotado inferiormente tiene mínimo. $A \neq \emptyset$ y $ci(A) \neq \emptyset \Rightarrow \min(A)$ existe.