Invarianza por rotaciones

Fórmula para suma de ángulos

Sean OX', OY' y L tres rectas obtenidas de rotar la recta OX en x, $x + \pi/2$ e y radianes, respectivamente.

Sean P y Q en $\{R : d(R, O) = 1\}$, $P \in OX'$ y $Q \in L$.

En OXY, $P = (cos(x), sen(x))$ y $Q = (cos(y), sen(y))$.

En $OX'Y'$, $P = (1, 0)$ y $Q = (cos(y - x), sen(y - x))$.

Independencia del sistema para $d(P, Q) \Rightarrow$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & (1 - cos(y - x))^2 + (sen(y - x))^2 & = & (cos(x) - cos(y))^2 + (sen(x) - sen(y))^2 \\
\Leftrightarrow & 2 - 2cos(y - x) & = & 2 - 2cos(x)cos(y) - 2sen(x)sen(y) \\
\Leftrightarrow & cos(y - x) & = & cos(x)cos(y) + sen(x)sen(y)
\end{array}
$$

Invarianza por rotaciones

Fórmula para suma de ángulos

La paridad *cos* se deduce al tomar $y = ?...$ en

$$cos(y - x) = cos(x)cos(y) + sen(x)sen(y)$$

Del mismo modo, para $x = ?...$ se tiene que

$$cos(y - \pi/2) = sen(y)$$

De lo anterior se deduce la imparidad de *sen*:

$$\begin{aligned} sen(-y) &= cos(-y - \pi/2) \\ &= cos(y + \pi/2) \\ &= cos(y)cos(-\pi/2) + sen(y)sen(-\pi/2) \\ &= -sen(y) \end{aligned}$$

Además,

$$sen(y - \pi/2) = -sen(\pi/2 - y) = -cos(-y) = -cos(y)$$

Invarianza por rotaciones

Fórmula para suma de ángulos

Usando las simetrías de seno y coseno en

$$cos(x)cos(y) + sen(x)sen(y) = cos(y - x)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} cos(y+x) &= cos(y)cos(-x) + sen(y)sen(-x) \\ &= cos(y)cos(x) - sen(y)sen(x) \end{aligned}$$

La fórmula para $sen(x + y)$ se deduce de lo anterior:

$$\begin{aligned} sen(x+y) &= cos(x + y - \pi/2) \\ &= cos(x)cos(y - \pi/2) - sen(x)sen(y - \pi/2) \\ &= cos(x)sen(y) + sen(x)cos(y) \end{aligned}$$

y finalmente,

$$\begin{aligned} sen(x-y) &= sen(x)cos(-y) + cos(x)sen(-y) \\ &= sen(x)cos(y) - cos(x)sen(y) \end{aligned}$$

Trigonometría

Triángulo Rectángulo

- Sea x un ángulo no recto de un triángulo rectángulo con cateto opuesto a, cateto adyacente b e hipotenusa c.

(1)

$$cos(x) = \frac{b}{c}$$

(2)

$$sen(x) = \frac{a}{c}$$

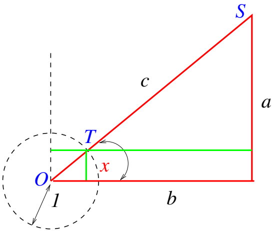
(3)

$$tan(x) = \frac{a}{b}$$

Trigonometría

Triángulos Rectángulos

- Pendiente OS = pendiente OT: $\frac{sen(x)}{cos(x)} = \frac{a}{b}$
- Distancia S a O: $c^2 = a^2 + b^2$



Distancia S a T: $(c-1)^2 = (a - sen(x))^2 + (b - cos(x))^2$

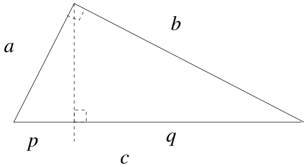
$c = asen(x) + bcos(x)$ y $0 = bsen(x) + acos(x)$

$\Rightarrow cos(x) = ?... \qquad = \frac{b}{c}$, $sen(x) = ?... \qquad = \frac{a}{c}$.

Trigonometría

Problemas

- Demuestre que en el triángulo rectángulo de la figura se cumple



  que $p = a^2/c$ y $q = b^2/c$.
- La distancia sobre la tierra entre Antofagasta ($23^o S$) y Punta Arenas ($53^o S$) es $\frac{\pi}{6} R$ Km, donde $R = 6380$, es el radio de la tierra. Determine la mínima altura a la que habría que llegar para ver ambas ciudades.
- Un avión que viene desde Argentina vuela a 10 km de la superficie de la tierra. Determine a que distancia está del monte Aconcagua cuando logra ver su cima, si se sabe que la mayor sombra de este monte tiene un largo de 267 kms.

? ...

Trigonometría

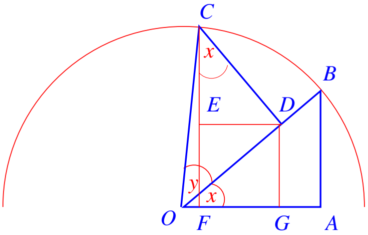
Suma de ángulos

Deduzca las fórmulas para la suma de ángulos a partir de la geometría de la figura.

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple:

- $sen(x+y) = sen(x)cos(y)+cos(x)sen(y)$
- $cos(x+y) = cos(x)cos(y)-sen(x)sen(y)$

? ...



Trigonometría

Suma de ángulos

Para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple:

$sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$ y $cos(2x) = ?...$ $-$

También

$$\begin{aligned} sen(3x) &= sen(2x)cos(x) + sen(x)cos(2x) \\ &= 2sen(x)(cos(x))^2 + sen(x)?... \\ &= sen(x)(4(cos(x))^2 - 1) \end{aligned}$$

Determinar $sen(x)$ y $cos(x)$ para $x = \pi/3$ y $\pi/6$.

? ...

Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, se cumple:

$sen(x+y) = sen(x)cos(y)+cos(x)sen(y)$? ...

$sen(x-y) = sen(x)cos(y)-cos(x)sen(y)$? ...

Sumando

$sen(x+y) + sen(x-y) = 2sen(x)cos(y)$? ...

Restando

$sen(x+y) - sen(x-y) = 2cos(x)sen(y)$? ...

Tomando $u = x + y$, $v = x - y \Rightarrow$ $\frac{u+v}{2} = x$ y $\frac{u-v}{2} = y$

$sen(u)+sen(v) = 2sen(\frac{u+v}{2})cos(\frac{u-v}{2})$? ... $+$

$sen(u)-sen(v) = 2sen(\frac{u-v}{2})cos(\frac{u+v}{2})$? ... $-$

Trigonometría

Identidades

Más relaciones entre las funciones trigonométricas.

- $1 + tan^2(x) = sec^2(x)$, $x \in dom(tan)$.
- $tan(x+y) = \frac{tan(x)+tan(y)}{1-tan(x)tan(y)}$, $x, y, x+y \in dom(tan)$.
- $tan(2x) = \frac{2tan(x)}{1-(tan(x))^2}$, $x, 2x \in dom(tan)$.

Identidades en términos del ángulo doble o del ángulo medio

- $cos(x) = \sqrt{\frac{1+cos(2x)}{2}}$.
- $sen(x) = \sqrt{\frac{1-cos(2x)}{2}}$.
- $tan(x) = \sqrt{\frac{1-cos(2x)}{1+cos(2x)}}$.
- $sen(2x) = 2\frac{tan(x)}{1+(tan(x))^2}$.
- $cos(2x) = \frac{1-(tan(x))^2}{1+(tan(x))^2}$.

Ecuaciones Trigonométricas

Simples

La ecuación

$$sen(x) = a$$

tiene solución si y sólo si $|a| \leq 1$.

Si α es una solución en $[-\pi/2, \pi/2]$, entonces $\pi - \alpha$ es solución y en general toda solución se escribe como

$$k\pi + (-1)^k \alpha$$

para algún $k \in \mathbb{Z}$.

La ecuación

$$cos(x) = a$$

tiene solución si y sólo si $|a| \leq 1$.
Si α es una solución en $[0, \pi]$, entonces $-\alpha$ también es una solución y en general ? ...

La ecuación

$$tan(x) = a$$

tiene solución para todo a.
Si α es una solución en $(-\pi/2, \pi/2)$, entonces $\pi + \alpha$ también es solución y en general toda solución se escribe como $k\pi + \alpha$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

Ecuaciones Trigonométricas

Combinadas

La ecuación

$$asen(x) + bcos(x) = c.$$

tiene solución para $|c| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$.

Se reduce a lo que ya sabemos.

Sea α con $cos(\alpha) = \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Entonces $sen(\alpha) = \frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ y la ecuación es equivalente a:

$$\frac{a}{|a|}cos(\alpha)sen(x) + \frac{b}{|b|}sen(\alpha)cos(x) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Que equivale a una de las siguientes:

$$sen(x \pm \alpha) = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$