

Funciones

Crecientes

↗ ↗ Una función f es **creciente** en A
si para todo $x, y \in A$,

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

↗ ↗ Una función f es **estrictamente** creciente en A
si para todo $x, y \in A$,

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

↘ ↘ Una función f es **decreciente** en A
si para todo $x, y \in A$,

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

↘ ↘ Una función f es **estrictamente** decreciente en A
si para todo $x, y \in A$,

Funciones

Crecimiento

- f es creciente, estrictamente creciente, decreciente o estrictamente decreciente, si lo es en su dominio.
- Una función f es **monótona** en A si es creciente en A o es decreciente en A .
- Una función f es **estrictamente** monótona en A si es estrictamente creciente en A o estrictamente decreciente en A .

Funciones

Acotamiento

- Una función f es **acotada superiormente** si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que para todo $y \in \text{dom}(f)$, $M \geq f(y)$.
- Una función f es **acotada inferiormente** si existe $m \in \mathbb{R}$ tal que para todo $y \in \text{dom}(f)$, $m \leq f(y)$.
- Una función f tiene periodo $p > 0$ si

$$\forall y \in \text{dom}(f), f(y) = f(y + p)$$

Funciones

Álgebra: af

Constante por una función

Para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y f una función se define af como la función con dominio $\text{dom}(f)$ y que a cada x asocia

$$(af)(x) = a \cdot f(x)$$

f	par	impar	inyectiva	periódica
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
af	par	impar	inyectiva	periódica

Funciones

Álgebra: af

Constante por una función

Para $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ y f una función se define af como la función con dominio $\text{dom}(f)$ y que a cada x asocia

$$(af)(x) = a \cdot f(x)$$

f	< 0	> 0	$\nearrow$	$\searrow$	$f \leq M$	$m \leq f$
$a > 0$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
af	< 0	> 0	$\nearrow$	$\searrow$	$af \leq aM$	$am \leq af$

f	< 0	> 0	$\nearrow$	$\searrow$	$f \leq M$	$m \leq f$
$a < 0$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
af	> 0	< 0	$\searrow$	$\nearrow$	$aM \leq af$	$af \leq am$

Funciones

Álgebra: $f + g$

Suma de funciones

Para f y g funciones se define $f + g$ como la función con dominio $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ y que a cada x asocia

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

f	par	impar	$\nearrow$	$\searrow$	> 0	< 0	$f \leq M$	$m \leq f$
g	par	impar	$\nearrow$	$\searrow$	> 0	< 0	$g \leq M'$	$m' \leq g$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f + g$	par	impar	$\nearrow$	$\searrow$	> 0	< 0	$f + g \leq M + M'$	$m + m' \leq f + g$

Funciones

Álgebra: $f \cdot g$

Producto de funciones

Para f y g funciones se define $f \cdot g$ como la función con dominio $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ y que a cada x asocia

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$f \cdot g$		f	
		par	impar
g	par	par	impar
	impar	impar	par

$f \cdot g$		f		
		> 0	$= 0$	< 0
g	> 0	> 0	$= 0$	< 0
	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
	< 0	< 0	$= 0$	> 0

Funciones

Álgebra: $f \cdot g$

Producto de funciones

Para f y g funciones se define $f \cdot g$ como la función con dominio $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ y que a cada x asocia

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

f	$\nearrow y \geq 0$	$\searrow y \geq 0$	$0 \leq f \leq M$
g	$\nearrow y \geq 0$	$\searrow y \geq 0$	$0 \leq g \leq M'$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f \cdot g$	$\nearrow y \geq 0$	$\searrow y \geq 0$	$0 \leq fg \leq MM'$

Funciones

Álgebra: $\frac{1}{f}$

Función Recíproca

Para una función f se define $\frac{1}{f}$ como la función con dominio $\text{dom}(f) \setminus \{x : f(x) = 0\}$ y que a cada x asocia

$$\frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)}$$

f	par	impar	< 0	> 0	$\nearrow y > 0$	$\searrow y > 0$	$0 < m \leq f \leq M$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	
$\frac{1}{f}$	par	impar	< 0	> 0	$\searrow y > 0$	$\nearrow y > 0$	$1/M \leq 1/f \leq 1/m$

Funciones

Álgebra: $\frac{f}{g}$

Función Cuociente

Para f y g funciones se define $\frac{f}{g}$ como la función con dominio $\text{dom}(f) \cap \text{dom}(g) \setminus \{x : f(x) = 0\}$ y que a cada x asocia

$$\frac{g}{f}(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$$

Funciones

Álgebra: composición

Composición

Para f y g funciones se define $f \circ g$ como la función con dominio $g^{-1}(\text{dom}(f))$ y que a cada x asocia

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

$f \circ g$		f	
		par	impar
g	par	par	par
	impar	par	impar

$f \circ g$		f	
			
g			
			

Funciones

Álgebra: composición

Composición

Para f y g funciones se define $f \circ g$ como la función con dominio $g^{-1}(\text{dom}(f))$ y que a cada x asocia

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

f	inyectiva	> 0	< 0	*	$f \leq M$	$m \leq f$
g	inyectiva	*	*	periódica	*	*
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$f \circ g$	inyectiva	> 0	< 0	periódica	$f \circ g \leq M$	$m \leq f \circ g$

Para una expresión $f(x)$ estudiamos:

- Dominio: $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$.
- Ceros y signos: $f(x) = 0$, $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$.
- Simetrías: f par: $\forall x, f(x) = f(-x)$; f impar $\forall x, f(-x) = -f(x)$.
- Crecimiento: f (estrictamente) creciente y/o (estrictamente) decreciente.
- Acotamiento: f acotada superior y/o inferiormente.
- Periodicidad: Existe $p > 0$ con $\forall x, f(x + p) = f(x)$.
- Inyectividad: $\forall x, y, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.
- Sobreyectividad: $\forall y$, existe $x, y = f(x)$.
- Biyectividad:
- Búsqueda de una función inversa:

Funciones

Ejemplo: la asignación $f(x) = 2x$.

Dominio, ceros y signos, simetrías, crecimiento, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, inversa.

? ...



Funciones

Ejemplo: la asignación

$$f(x) = x^2.$$

Dominio, ceros y signos, simetrías, crecimiento, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, inversa.

? ...



Funciones

Ejemplo: la asignación

$$f(x) = b\sqrt{1 - (x/a)^2}, \quad a, b > 0$$

Dominio, **ceros y signos**, **simetrías**, crecimiento, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, inversa.

? ...

