

Trigonometría

Radianes

- Sea C la circunferencia unitaria $u^2 + v^2 = 1$.
- La mitad del largo de C lo llamaremos π , aproximadamente 3,1415.
- Usaremos largos de segmentos de C para medir ángulos.
- La unidad de medida de un ángulo es **radián [rad]**.

Trigonometría

Radianes

- Sea $P \in C$, $A = (1, 0)$ y $O = (0, 0)$
- ángulo **positivo** AOP es el ángulo en el que hay que rotar el rayo OA en el sentido **contrario** a los punteros del reloj, para obtener P .
- La medida del ángulo AOP es el largo del segmento de C entre A y P en ese sentido.
- Ejemplos:
 - $P = (0, 1) \rightarrow ? \dots$
 - $P = (-1, 0) \rightarrow ? \dots$
 - $P = (0, -1) \rightarrow ? \dots$

Trigonometría

Radianes

- Sea $P \in C$, $A = (1, 0)$ y $O = (0, 0)$
- ángulo **negativo** AOP es el ángulo en el que hay que rotar el rayo OA en el sentido de los punteros del reloj, para obtener P .
- La medida del ángulo AOP es el largo del segmento de C entre A y P en ese sentido.
- Ejemplos:
 - $P = (0, -1) \rightarrow ?\dots$.
 - $P = (-1, 0) \rightarrow ?\dots$.
 - $P = (0, 1) \rightarrow ?\dots$.

? ...

Funciones

coseno

La función $\cos(x)$ es la **primera** coordenada del punto de C , obtenido al moverse sobre C , un ángulo x .

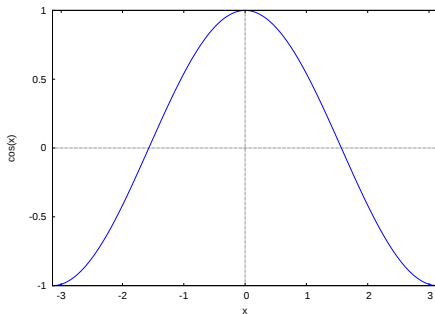
Algunos valores de $\cos(x)$

$$\cos(0) = ?...$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?... .$$

$$\cos(\pi) = ?... .$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ?... .$$



Funciones

seno

La función $\text{sen}(x)$ es la **segunda** coordenada del punto de C , obtenido al moverse sobre C , un ángulo x . Algunos valores de $\text{sen}(x)$

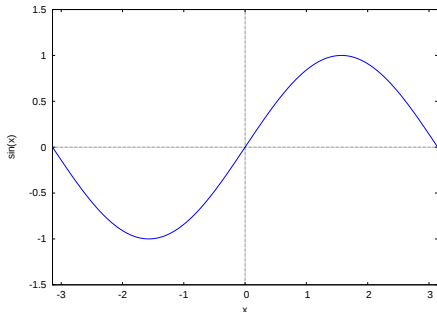
$$\text{sen}(0) = ?...$$

$$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?... .$$

$$\text{sen}(\pi) = ?... .$$

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = ?... .$$

? ...



Funciones

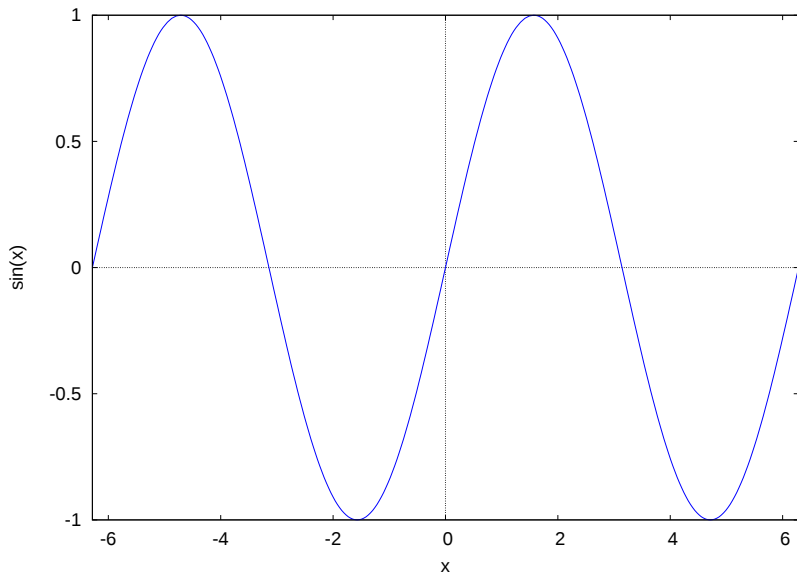
coseno y seno

- El punto $(\cos(x), \sin(x))$ está en la circunferencia $u^2 + v^2 = 1$.
- Las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ satisfacen

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$$

- Identidad Fundamental.

sen en $[-2\pi, 2\pi]$



Funciones

$\text{sen}(x)$

Dominio, Periodicidad, ceros y signos, simetrías, crecimiento, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, inversa.

- $\text{sen}(x)$ está definido para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Periódica: periodo 2π .
- $\text{sen}(x) = 0$ para $0, \pi, -\pi$, en general $k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{sen}(x) > 0$ en $(0, \pi)$, en general $(2k\pi, (2k + 1)\pi)$, con $k \in \mathbb{Z}$.
- $\text{sen}(x) < 0$ en $(\pi, 2\pi)$, en general ? ...
- .
- $\text{sen}(-x) = -\text{sen}(x)$. Es impar.

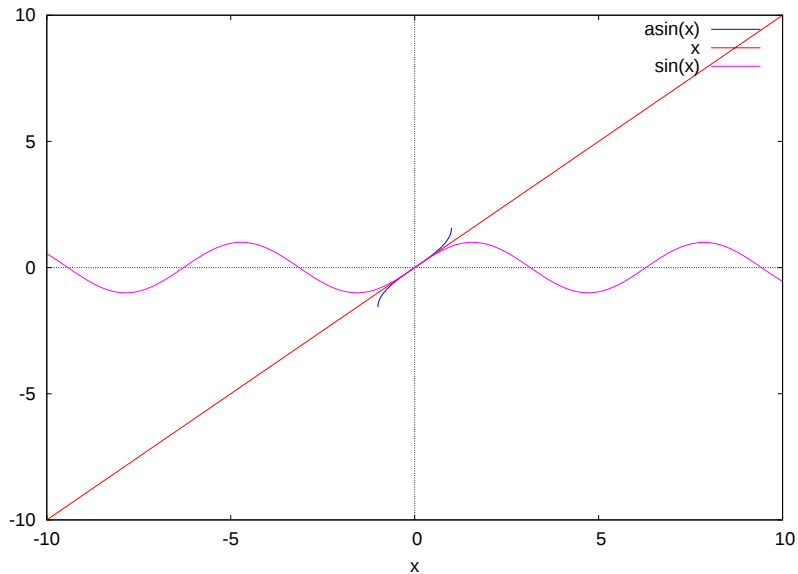
Funciones

$\text{sen}(x)$

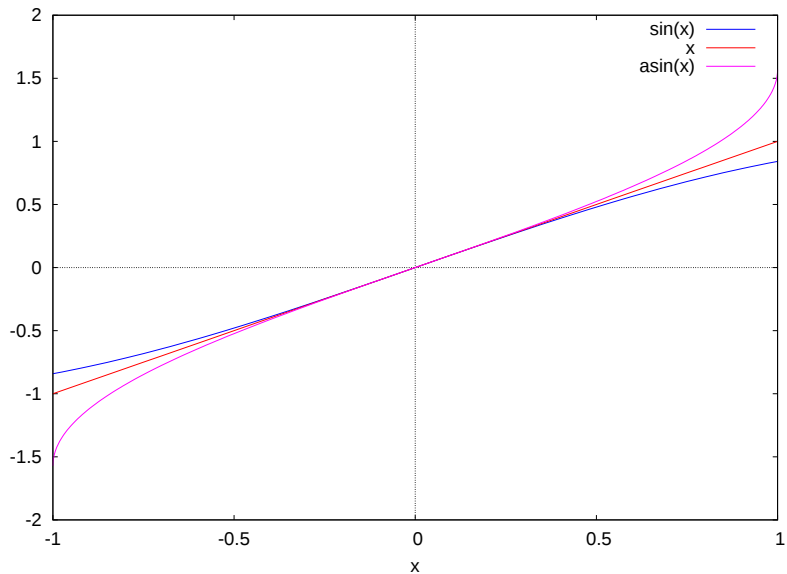
Dominio, Periodicidad, ceros y signos, simetrías, crecimiento, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, inversa.

- sen es est. creciente en $(-\pi/2, \pi/2)$, en general en $(-\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- sen es est. decreciente en $(\pi/2, 3\pi/2)$, en general en ?
...
- $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$.
- Al ser periódica no es inyectiva.
- Para cada $y \in [-1, 1]$, existe $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\text{sen}(x) = y$.
- $\text{sen} : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$ es inyectiva y sobreyectiva, luego biyectiva.
- La función inversa se llama *arcoseno* y se denota arcsen .

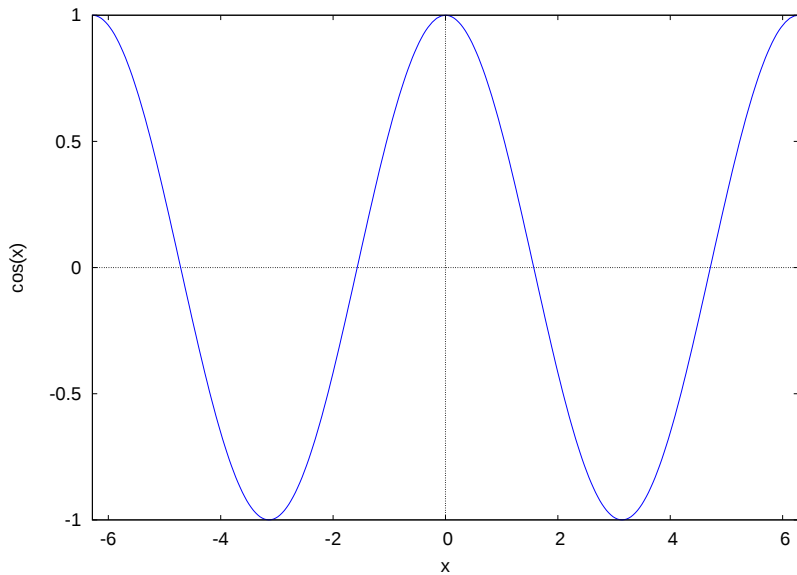
arcoseno, seno y x



arcoseno, sen y x en $[-1, 1]$



cos en $[-2\pi, 2\pi]$



Funciones

$\cos(x)$

Dominio, Periodicidad, ceros y signos, simetrías, crecimiento, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, inversa.

- $\cos(x)$ está definido para todo $x \in \mathbb{R}$.
- Periódica: periodo 2π .
- $\cos(x) = 0$ para $\pi/2, 3\pi/2$, en general ? ...
- $\cos(x) > 0$ en $(-\pi/2, \pi/2)$, en general en $(-\pi/2 + 2k\pi, -\pi/2 + (2k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos(x) < 0$ en $(\pi/2, 3\pi/2)$, en general en $(\pi/2 + 2k\pi, \pi/2 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos(-x) = \cos(x)$. Es par.

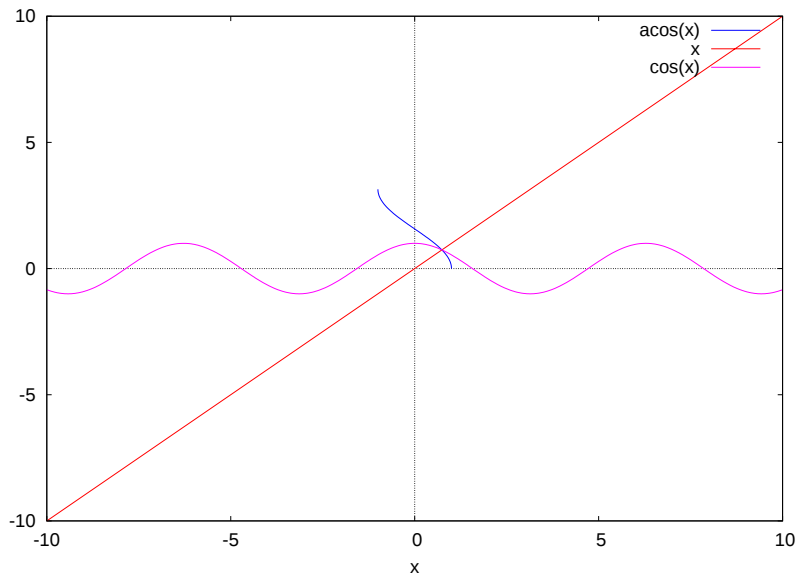
Funciones

$\cos(x)$

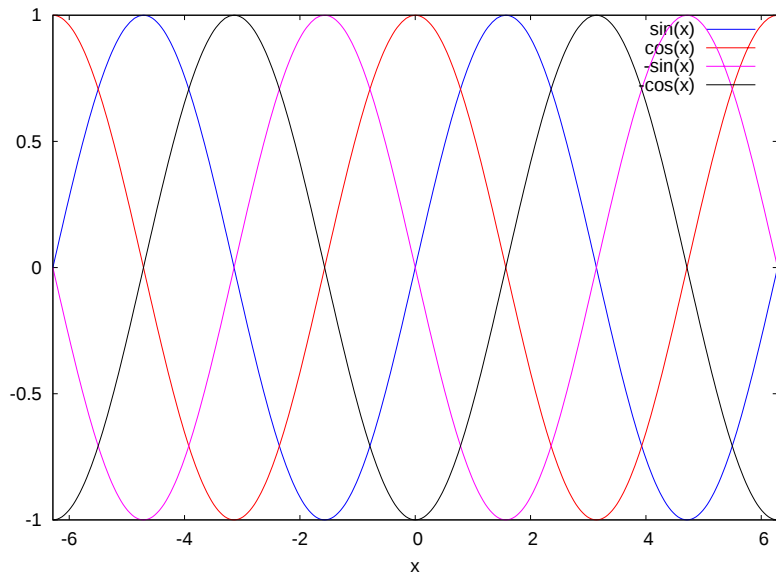
Dominio, Periodicidad, ceros y signos, simetrías, crecimiento, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, inversa.

- $\cos$ es est. creciente en $(\pi, 2\pi)$, en general en $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- $\cos$ es est. decreciente en $(0, \pi)$, en general en $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \cos(x) \leq 1$.
- Al ser periódica no es inyectiva.
- Para cada $y \in [-1, 1]$, existe $x \in [0, \pi]$ tal que $\cos(x) = y$.
- $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ es inyectiva y sobreyectiva, luego biyectiva.
- La función inversa se llama *arcocoseno* y se denota $\arccos$.

arcocoseno en $[-1, 1]$



cos y sen



Funciones

Propiedades de $\cos$ y $\sen$

- Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sen(x + \pi) = -\sen(x)$$

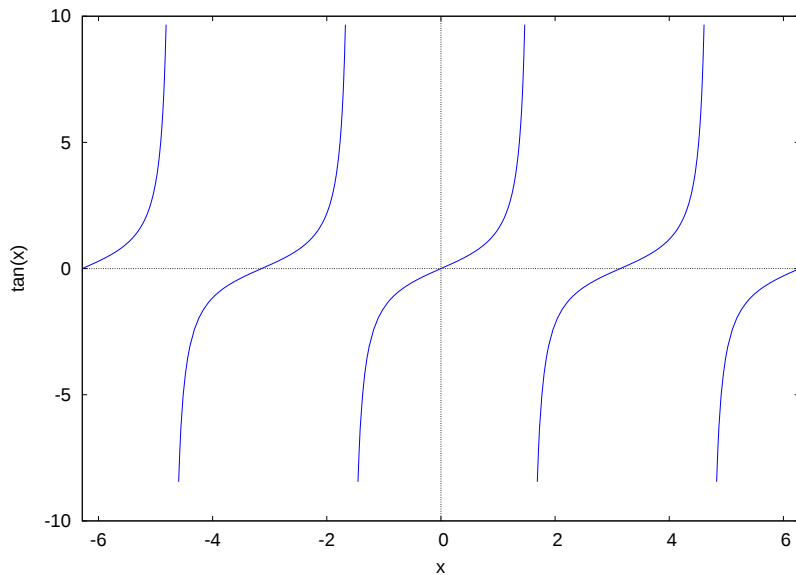
$$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$$

- Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\sen(x + \pi/2) = \cos(x)$$

$$\sen(x + 3\pi/2) = -\cos(x)$$

$\tan$ en $[-2\pi, 2\pi]$



Funciones

$\tan(x)$

Dominio, Periodicidad, simetrías, ceros y signos, crecimiento, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, inversa.

- $\tan(x)$ está definido para x , con $\cos(x) \neq 0$.
- Periódica: periodo π .

$$\tan(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

- $\tan(-x) = -\tan(x)$. Es impar.

$$\tan(-x) = \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$$

- $\tan(x) = 0$ para $0, \pi$, en general $k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
- $\tan(x) > 0$ en $(0, \pi/2)$, $(\pi, 3\pi/2)$ en general en ? ...
- $\tan(x) < 0$ en $(-\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi)$ en general en ? ...

Funciones

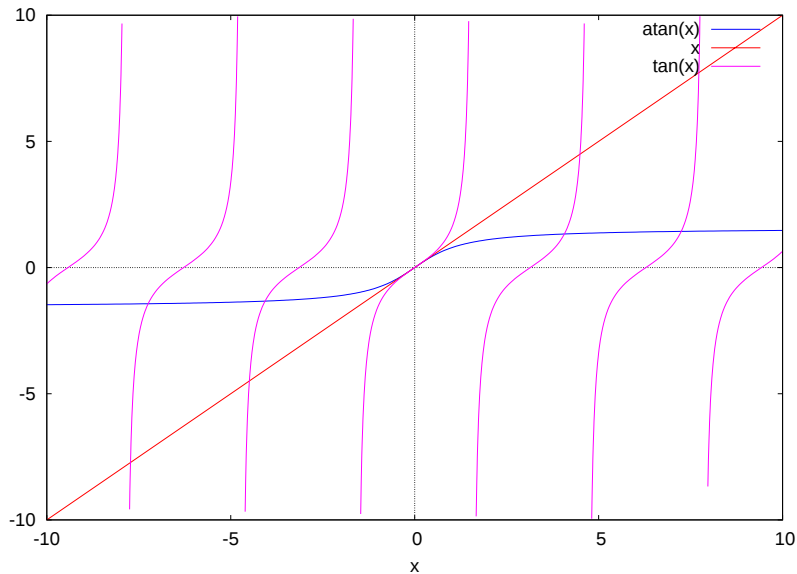
$\tan(x)$

Dominio, Periodicidad, simetrías, ceros y signos, crecimiento, acotamiento, inyectividad, sobreyectividad, biyectividad, inversa.

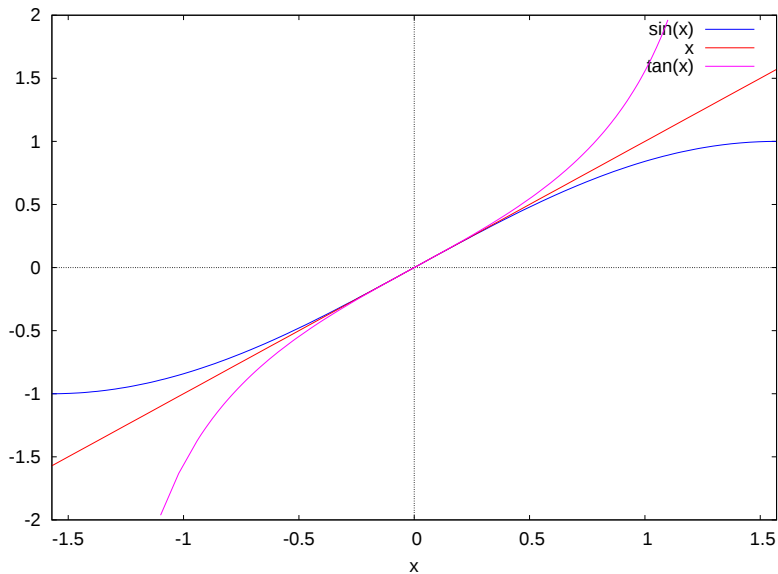
- $\tan$ es est. creciente en $(-\pi/2, \pi/2)$, en general ejercicio.
- No es acotada superior ni inferiormente.
- Al ser periódica no es inyectiva.
- Para cada $y \in \mathbb{R}$, existe $x \in (-\pi/2, \pi/2)$ tal que $\tan(x) = y$.
- $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva y sobreyectiva, luego biyectiva.
- La función inversa se llama *arcotangente* y se denota $\arctan$.

? ...

arcotangente en $\mathbb{R}$



$$|\sin(x)| \leq |x| \leq |\tan(x)|$$



Funciones

Propiedades

- Desigualdad Fundamental
- Para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2})$,

$$\text{sen}(x) \leq x \leq \text{tan}(x)$$

- Impares: para todo $x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$,

$$\text{tan}(x) \leq x \leq \text{sen}(x)$$

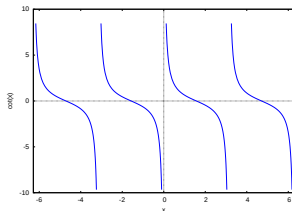
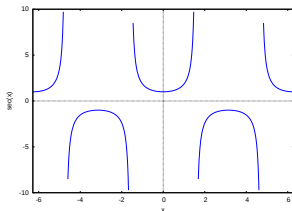
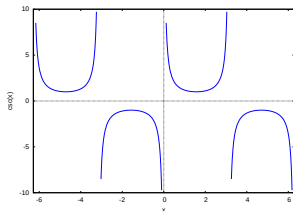
- Entonces, para $|x| < \frac{\pi}{2}$

$$|\text{sen}(x)| \leq |x| \leq |\text{tan}(x)|.$$

Trigonometría

Ejercicios

Analice las siguientes expresiones: $\frac{1}{\operatorname{sen}(x)}$, $\frac{1}{\operatorname{cos}(x)}$, $\frac{\operatorname{cos}(x)}{\operatorname{sen}(x)}$.



f	par	impar	< 0	> 0	$\nearrow y > 0$	$\searrow y > 0$	$0 < m \leq f \leq M$
	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
$\frac{1}{f}$	par	impar	< 0	> 0	$\searrow y > 0$	$\nearrow y > 0$	$1/M \leq 1/f \leq 1/m$

Trigonometría

Ejercicios

Analice con el mayor detalle las siguientes expresiones: $x\sin(x)$, $\sin(x)\cos(x)$, $\sin(x) + \cos(x)$, $\sin(x^2)$ y $(\sin(x))^2$.

