

Aux Extra

$$\text{P1)} f: [-1/2, 1/2] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

PRIMERO NOS DAMOS CUENTA QUE PARA TODO $x \neq 0$
NO HAY PROBLEMAS PARA SACAR LA DERIVADA DE f
MEDIANTE LAS FÓRMULAS QUE CONOCEMOS

POR LO TANTO PARA $x \neq 0$

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{\sin(x)} \right)' \underset{\substack{\text{REGLA} \\ \text{PARA LA} \\ \text{DIVISIÓN}}}{=} \frac{\frac{\sin x}{1+x} - \cos x \ln(1+x)}{(\sin(x))^2}$$

PARA EL CASO $x=0$, COMO NUESTRA FUNCIÓN SE
INDEFINIE DEBEMOS CALCULAR LA DERIVADA DE f
EN ESE PTO POR DEFINICIÓN. EN EFECTO,

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ f(0)=1}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{\sin(h)} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+h)}{h \cdot \sin(h)} - \frac{\sin h}{h \cdot \sin(h)}}{h}$$

~~Por un lado vemos que~~
 ~~$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(h)}{h} = 1$~~

~~$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h \ln(h)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h}}{\ln h + h \cosh}$~~
~~L'HOPITAL~~

Vemos que se puede ocupar L'HOPITAL.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(h)}{h \ln(h)} \xrightarrow{\text{L'HOPITAL}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+h} - \cosh}{\ln h + h \cosh}$$

$$\xrightarrow{\text{L'HOPITAL}} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{(1+h)^2} - \sinh}{\cosh + \cosh + h \sinh} = \frac{-1 - 0}{1 + 1 - 0} = -\frac{1}{2}$$

Por lo tanto $f'(0)$ existe y finalmente la derivada de f queda definida como.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\frac{\ln x}{1+x} - \cosh \ln(1+x)}{(\ln x)^2} & x \neq 0 \\ -1/2 & x = 0 \end{cases}$$

Por otro lado nos piden el Polinomio de orden 2 en torno a cero. El Pol. de Taylor se define como

$$P_f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

pero nos piden sólo de orden 2 por lo tanto

$$P_f^2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

[Pn] Sabemos que

$$f(0) = x \quad f'(0) = -1/2$$

Sólo nos falta conocer $f''(0)$, que debemos calcularlo por definición ya que $f'(x)$ tiene problemas en $x=0$

$$f''(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(0+h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sinh h}{1+h} - \cosh \ln(1+h)}{\frac{\sinh^2 h}{h}} + \frac{1}{2}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sinh h}{1+h} - \cosh \ln(1+h) + \frac{\sinh^2 h}{2}}{h \sinh^2 h}$$

L'HOPITAL

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\cosh(1+h) - \sinh h}{(1+h)^2} - \frac{\cosh h}{1+h} + \sinh \ln(1+h) + \sinh \cosh h}{\sinh^2 h + 2h \sinh \cosh h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{\frac{\cosh h}{1+h}} - \cancel{\frac{\sinh h}{(1+h)^2}} - \cancel{\frac{\cosh h}{1+h}} + \cancel{\sinh \ln(1+h)} + \cancel{\sinh \cosh h}}{\cancel{\sinh h} (\sinh h + 2h \cosh h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-1 + (1+h)^2 \ln(1+h) + \cosh h (1+h)^2}{(1+h)^2 (\sinh h + 2h \cosh h)}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(n+h)\ln(n+h) + (n+h) + 2(n+h)\cosh h - \cosh h (n+h)^2}{2(n+h)(\sinh h + 2h \cosh h) + (n+h)^2 (\cosh h + 2\cosh h - 2h \sinh h)}$$

$\uparrow$
 L'HOPITAL

$$= \frac{0 + 1 + 2 - 0}{0 + 1 \cdot (1 + 2 - 0)} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow f''(0) = 1 \quad (\text{existe})$$

$$\therefore P_f^2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}$$

[P2]

(i) S, DERIVAMOS LA ECUACIÓN

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

podemos encontrar una expresión para y' y así obtener la recta tangente en (x_0, y_0) .
Entonces, derivando se tiene que:

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y y'}{b^2} = 0$$

$$y' = -\frac{2x}{a^2} \cdot \frac{b^2}{2y} = \underset{\substack{\uparrow \\ (x_0, y_0)}}{-\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2}}$$

La recta tangente que pasa por (x_0, y_0) y con pendiente $y'_{x_0, y_0} = m$ es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow y - y_0 = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} (x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{y y_0}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$\uparrow$
 (x_0, y_0)
 Pertenecen
 a la elipse

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{x x_0}{a^2} + \frac{y y_0}{b^2} = 1.}$$

Demstrar que la pendiente de la recta tangente era

$$m = -\frac{x_0 b^2}{y_0 a^2} \quad (\text{en } (x_0, y_0))$$

Por lo tanto la pendiente de la recta normal en (x_0, y_0) cumple (sea m_N)

$$m_N \perp m$$

$$\Leftrightarrow m_N \cdot m = -1$$

$$\Leftrightarrow m_N = \frac{y_0 a^2}{x_0 b^2}$$

Por lo tanto la ec. de la recta normal que pasa por (x_0, y_0) es

$$y - y_0 = \frac{y_0 a^2}{x_0 b^2} (x - x_0)$$

(ii) Si LA RECTA $y = mx + n$ interseca a la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$ debemos reemplazar y encontrar alguna condición.

$$L: y = mx + n \cap \odot$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (mx + n)^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + m^2 x^2 + 2mnx + n^2 = R^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 (m^2 + 1) + x(2mn) + (n^2 - R^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(2mn) \pm \sqrt{(2mn)^2 - 4(m^2 + 1)(n^2 - R^2)}}{2(m^2 + 1)}$$

[P2] (ii) Por lo tanto

$$L \cap \odot$$

$$\Leftrightarrow (2mn)^2 - 4(m^2+1)(n^2-R^2) \geq 0$$

← EL DISCRIMINANTE
ES ≥ 0
(EL IGUAL SE TIENE
CUANDO LA
RECTA ES
TANGENTE)

$$\Leftrightarrow \cancel{4m^2n^2} - \cancel{4m^2n^2} - \cancel{4m^2} + \cancel{4m^2}R^2 + \cancel{4R^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -m^2 + m^2R^2 + R^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow R^2(m^2+1) \geq m^2$$

Como lo trabajé sólo con equivalencias se tiene que

$y = mx + n$ intersección a $x^2 + y^2 = R^2$

ssi?

$$R^2(m^2+1) \geq m^2$$

(iii) DADA LAS PARTES ANTERIORES SE CONOCEN m Y n
(Que serán parte de la recta normal)

$$m = \frac{y_0 a^2}{x_0 b^2} \quad y \quad n = y_0 - \frac{y_0 a^2}{b^2} = y_0 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)$$

EL MENOR RADIO SE TENDRÁ CUANDO (GRACIAS A LA PARTE (ii))

$$R^2(m^2+1) = m^2$$

$$R^2 = \frac{m^2}{m^2+1} = \frac{y_0^2 \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^2}{\frac{y_0^2 a^4}{x_0^2 b^4} + 1} = \frac{x_0^2 y_0^2 (b^2 - a^2)^2}{a^4 b^4 \left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)}$$

P3

(i)

CON L'HOPITAL:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{x^2}}{x} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'HOPITAL}}}{x \rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2x e^{x^2}}{1} = \frac{1 - 0}{1} = 1$$

SIN L'HOPITAL:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - e^{x^2} + 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{e^{x^2} - 1}{x^2} \end{aligned}$$

$$= 1 - \lim_{x \rightarrow 0} x = 1 - 0 = 1$$

$u = x^2$
 $x \rightarrow 0$
 $u \rightarrow 0$

(ii) ESTE SOLO SE PUEDE CON L'HOPITAL (A SIMPLE VISTA)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln x}{\left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) - \frac{1}{2}} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{L'HOPITAL}}}{x \rightarrow 0}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cancel{\ln x} + x \cancel{\cos x}}{x^2 \cancel{\ln x} - 2x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \ln x + x^4 \cos x}{x^2 \ln x - 2x(1 - \cos x)}$$

(PORQUE SE SABE
QUE $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$)

COMPROBAR LO
POR L'HOPITAL

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \ln x + x^4 \cos x}{x^2 \ln x - 2x(1 - \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \ln x + x^4 \cos x}{x \ln x - 2 + 2 \cos x}$$

(ESTE NO ES EL
BUEN CAMINO)

SI LO VEMOS DE OTRA FORMA:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \operatorname{sen} x}{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 \frac{\operatorname{sen} x}{x}}{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3}{\operatorname{sen} x - x} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12x^2}{\cos x - 1} \end{array}$$

L'HOPITAL L'HOPITAL

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12}{-(1 - \cos x) \frac{1}{x^2}} = \frac{12}{-1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)} = -12 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-24}$$

(iii)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \operatorname{tg} \left(\frac{1}{x} \right) - x = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u^2} \operatorname{tg}(u) - \frac{1}{u}$$

$x = \frac{1}{u}$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(u) - u}{u^2} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sec^2 u - 1}{2u} \end{array} \quad \begin{array}{c} \uparrow \\ \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} u \operatorname{sech} u}{2} \end{array}$$

L'HOPITAL L'HOPITAL

$$= \frac{2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 0}{2} = 0.$$

(iv) CON L'HOPITAL

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\cos \left(\frac{\pi}{2} (1-x) \right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\sin \left(\frac{\pi}{2} (1-x) \right) \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1 \cdot \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

P3 (i.v) Sin L'HOPITAL (NOTAR QUE $\cos(\frac{\pi}{2}(1-x)) = \sin(\frac{\pi}{2}x)$)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}(1-x))} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\sin(\frac{\pi}{2}x)} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \text{"N. QUITA"} \\ \text{"N. PONE"} \end{matrix} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\frac{\pi}{2}x}} \cdot \frac{2}{\pi}$$

$$\uparrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u)}{u} \cdot \frac{2}{\pi} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{2}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

$$u = \frac{\pi}{2}x$$

$$u \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow 0$$

(v) Cuando L'HOPITAL SE TIENE que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(e^x + x e^{-x})}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x + x e^{-x}} \cdot \frac{(e^x + e^{-x} - x e^{-x})}{2x}$$

$\uparrow$
L'HOPITAL

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - x e^{-x}}{2x(e^x + x e^{-x})} \cdot \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 1 - x}{2x(e^{2x} + x)}$$

Veamos que para cuando $x \rightarrow 0^+$ y $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2x} + 1 - x}{2x(e^{2x} + x)} \quad \begin{matrix} \uparrow \\ x = 0 + \frac{1}{u} \end{matrix} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2}{u}} + 1 - \frac{1}{u}}{\frac{2}{u}(e^{\frac{2}{u}} + \frac{1}{u})}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} u \frac{(e^{\frac{2}{u}} + 1 - \frac{1}{u})}{2(e^{\frac{2}{u}} + \frac{1}{u})} = +\infty \cdot \frac{(1+1-0)}{2 \cdot (1+0)} = +\infty$$

Por OTRO LADO $x \rightarrow 0^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2x} + 1 - x}{2x(e^{2x} + x)} \underset{x = 0 - \frac{1}{u}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^{-2/u} + 1 + \frac{1}{u}}{-\frac{2}{u} (e^{-2/u} - 1/u)}$$

$$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{-u \left(\frac{1}{e^{2/u}} + 1 + \frac{1}{u} \right)}{2 \left(\frac{1}{e^{2/u}} - \frac{1}{u} \right)} = \frac{-\infty (2 + 0)}{2(1 - 0)}$$

$$= -\infty$$

∴ el límite cuando $x \rightarrow 0$ (propriadamente) de

$$f(x) = \frac{\ln(e^x + x e^{-x})}{x^2} \text{ no existe.}$$

AUX EXTRA

[P4] Sea $f(x) = e^{\sqrt{2} \tan x}$

(i) Not piden

$$P_f^2(x) = f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!} (x-0)^2$$

$$= f(0) = e^{\sqrt{2} \tan 0} = e^0 = 1.$$

Ahora calculamos f' (podemos directamente ya que la función no se indefinir).

$$f'(x) = (e^{\sqrt{2} \tan x})' = e^{\sqrt{2} \tan x} \cdot (\sqrt{2} \tan x)'$$
$$= e^{\sqrt{2} \tan x} \cdot \sqrt{2} \sec x.$$

$$\Rightarrow f'(0) = e^0 \cdot \sqrt{2} \cdot \sec(0) = 1 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$$

Calculamos f'' .

$$f'' = (e^{\sqrt{2} \tan x} \cdot \sqrt{2} \sec x)' = \sqrt{2} (e^{\sqrt{2} \tan x} \sec x)'$$

$$= \sqrt{2} \cdot ((e^{\sqrt{2} \tan x})' \sec x + e^{\sqrt{2} \tan x} (\sec x)')$$

$$= \sqrt{2} (e^{\sqrt{2} \tan x} \cdot (\sqrt{2} \sec x)' \sec x + e^{\sqrt{2} \tan x} \cdot (\sec x)')$$

$$= \sqrt{2} (e^{\sqrt{2} \tan x} \cdot \sqrt{2} \sec^2 x - e^{\sqrt{2} \tan x} \tan x)$$

$$\Rightarrow f''(0) = \sqrt{2} (e^0 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 - 0) = 2.$$

$$\begin{aligned}
 P_f(x) &= f(0) + f'(0)(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}(x-0)^2 \\
 &= 1 + \sqrt{2}x + \frac{2}{2!}(x-0)^2 \\
 &= 1 + \sqrt{2}x + x^2 //
 \end{aligned}$$

(ii) Vemos que el dominio de $\sin x$ es todo $\mathbb{R}$.
 Por lo tanto por comparación de funciones se tiene que

$$\text{Dom } f = \mathbb{R}.$$

Ceros:

No existen ceros de f ya que la exponencial es una función estrictamente positiva

$$\Rightarrow f(x) = e^{\sqrt{2} \sin x} > 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f.$$

Signo de f :

Dando lo anterior $f(x) > 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f.$

Recorrido:

Como vimos el signo de f se tiene que

$$\text{Recorrido } f = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}.$$

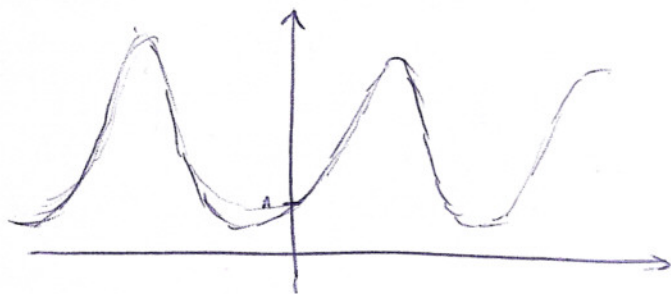
POR LA PERIODICIDAD DE SENO.

Periodicidad:

Veamos si existe $t \neq 0 \quad \forall x \in \text{Dom } f$
 $f(x+t) = f(x)$ Si intentamos con $t = 2\pi$
 se tiene que
 $f(x+2\pi) = e^{\sqrt{2} \sin(x+2\pi)} = e^{\sqrt{2} \sin x} = f(x) //$ f es periódica de Período 2π .

AUX EXTRA

R4
(in)



PS $a > 0$

(a) Para una parte muestra la desigualdad

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$$

Primero verificamos que $-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} < 1$ (sabiendo que $s_n \rightarrow a$ y $s_n < a$)

En efecto,

Como $s_n \rightarrow a$ y $s_n < a$, y $-a < a$ se tiene que.

Para n suficientemente grande.

$$-a < 0 < s_n < a.$$

Entonces

$$-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} < 0 < 1 \quad \text{Para } n \text{ grande.}$$

(También se puede argumentar deduciendo que $-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} \rightarrow -\infty$)

Entonces aplicando la ~~desigualdad~~ desigualdad que dijimos

$$0 \leq \exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right) \leq \frac{a^2 - s_n^2}{a^2 - s_n^2 + s_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Por sandwich

$$\exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

$$s_n \rightarrow -a \quad s_n > -a$$

(b) Se sabe que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exp(x) \geq 1+x.$$

$$\Rightarrow \exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right) \geq 1 - \frac{s_n}{a^2 - s_n^2}$$

Por álgebra de límites el lado derecho se va

$$a + \infty.$$

(Como $s_n \rightarrow -a$, $s_n > -a$ y $-a < a$ entonces para n suficientemente grande $-a < s_n < a$

$$\Rightarrow 1 - \frac{s_n}{a^2 - s_n^2} > 0 \quad \text{Para } n \text{ grande}$$

$$\text{O también } \left(\begin{array}{l} s_n^2 \rightarrow a^2 \quad s_n^2 \neq a^2 \\ \Rightarrow \frac{s_n}{a^2 - s_n^2} \rightarrow -\infty \end{array} \right)$$

Por el sandwich

$$\exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

AUX EXTRA

[P6] Analicemos A primero

Se piden los $x \in \mathbb{R}$ tq

$$\frac{x}{1+x} \leq 0$$

Tenemos como puntos críticos 0 y -1.

$\Rightarrow$

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
x	-	-	+
1+x	-	+	+
FINAL	+	-	+

Por lo que solo nos interesan los puntos pertenecientes a $(-1, 0)$, de hecho -1 no se puede incluir porque la función $f(x) = \frac{x}{1+x}$ se undefined $\frac{0}{0}$, en cambio el cero si se incluye ya que $f(0) = 0$

$$\Rightarrow A = [-1, 0] \quad \rightarrow \text{(inferiormente y superiormente)}$$

A conjunto acotado y no vacío, posee ínfimo y supremo

$$\sup A = 0 = \max A$$

$$\inf A = -1$$

~~Entonces~~ A no tiene mínimo.

Analizamos ahora B.

$$a_n = \frac{1 - (-1)^n}{n}$$

a_n es una sucesión decreciente y siempre mayor o igual a cero, de hecho $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Cuando n es impar

$$a_n = \frac{2}{n} \Rightarrow \forall k \geq 0 \quad a_{2k+1} = \frac{2}{2k+1}$$

Cuando n es par

$$a_n = 0 \Rightarrow \forall k \geq 0 \quad a_{2k} = 0.$$

$$\Rightarrow a_n \geq 0$$

$$\text{Para } n=1 \quad a_n = 2.$$

$\Rightarrow$ ~~esta~~ B está acotado inf y superiormente

$$\sup B = \max B = 2.$$

$$\inf B = \min B = 0.$$

[P7] (a) Se sabe que $a_0 > 0$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{a_0}{1 + 0 \cdot a_0^2} = a_0 > 0$$

Ahora probamos a_n es positiva $\forall n$

Paso inductivo

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n a_n^2} > 0 \quad \text{claramente ya que}$$

$$a_n > 0$$

$$a_n^2 > 0$$

$$\forall n \in \mathbb{N}'$$

Ahora probamos que es decreciente

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{1 + n a_n^2} - a_n = \frac{a_n - a_n - n a_n^3}{1 + n a_n^2}$$

$$= - \frac{n a_n^3}{1 + n a_n^2} < 0$$

$$\Rightarrow a_{n+1} < a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(b) a_n es una sucesión decreciente y acotada inferiormente por cero, entonces por el Teorema de sucesiones monótonas a_n tiene límite

Supongamos que $a_n \rightarrow l. \Rightarrow a_{n+1} \rightarrow l$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + n a_n^2} \leq \frac{a_n}{1 + a_n^2} \quad \forall n > 1$$

Tomando límite se tiene que

(se conserva la desigualdad porque an es decreciente)

$$l \leq \frac{l}{1+l^2}$$

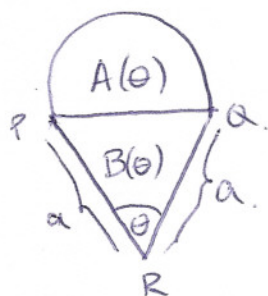
$$l > 0$$

$$1+l^2 \leq 1$$

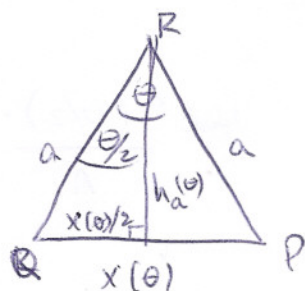
$$l^2 \leq 0$$

$$\Rightarrow l = 0.$$

P8



Buscamos una expresión para $A(\theta)$ y $B(\theta)$ en función de los datos.



~~h_a(θ) =~~

$$\frac{\text{sen}(\theta/2)}{x(\theta)/2} = \frac{\text{sen } 90}{a}$$

$$\text{sen}(\theta/2) = \frac{x(\theta)}{2a}$$

$$\Rightarrow x(\theta) = 2a \text{sen}(\theta/2)$$

$$h_a^2 + \left(\frac{x(\theta)}{2}\right)^2 = a^2$$

$$h_a^2 = a^2 - a^2 \text{sen}^2(\theta/2) = a^2 (1 - \text{sen}^2(\theta/2)) = a^2 \cos^2(\theta/2)$$

$$\Rightarrow h_a = a \cos(\theta/2)$$

$$\Rightarrow B(\theta) = \frac{x(\theta) \cdot h_a(\theta)}{2} = \frac{2a \text{sen}(\theta/2) \cdot a \cos(\theta/2)}{2}$$

base x altura
2

$$= \frac{a^2}{2} \text{sen}(\theta) = a^2 \text{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2)$$

POR OTRO LADO

RADIO DEL SEMICÍRCULO ES

$$R(\theta) = \frac{X(\theta)}{2} = a \sin(\theta/2)$$

$$\Rightarrow A(\theta) = \pi R^2(\theta) = \pi a^2 \sin^2(\theta/2)$$

Por lo tanto el límite que nos piden queda:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{A(\theta)}{\theta \cdot B(\theta)} = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\pi a^2 \sin^2(\theta/2)}{\theta \cdot a^2 \sin(\theta/2) \cos(\theta/2)}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \pi \cdot \frac{\sin(\theta/2)}{\theta} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{L'HOPITAL}}}{=} \pi \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sec^2(\theta/2) \cdot 1/2}{1}$$

$$= \frac{\pi}{2} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\cos^2(\theta/2)} = \left\lfloor \frac{\pi}{2} \right\rfloor$$

[pg] Derivando la ecuación se tiene que:

$$(x^3 y^3)' + (xy)' = (2)'$$

$$\Leftrightarrow (x^3)' y^3 + x^3 (y^3)' + (x)' y + x (y)' = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 y^3 + x^3 \cdot 3y^2 y' + y + xy' = 0$$

Evaluando en (x_0, y_0) obtenemos la pendiente que buscamos para la recta tangente:

$$3x_0^2 y_0^3 + x_0^3 \cdot 3y_0^2 y'_{x_0 y_0} + y_0 + x_0 y'_{x_0 y_0} = 0$$

$$y'_{x_0 y_0} = m$$

$$(x_0^3 \cdot 3y_0^2 + x_0) m = -y_0 - 3x_0^2 y_0^3$$

$$m = \frac{-y_0 - 3x_0^2 y_0^3}{3x_0^3 y_0^2 + x_0}$$

Por lo tanto la recta L que buscamos es:

$$y - y_0 = m (x - x_0)$$

$$y - y_0 = - \left(\frac{y_0 + 3x_0^2 y_0^3}{3x_0^3 y_0^2 + x_0} \right) (x - x_0)$$

CORTE EN EL EJE Y (X=0)

$$y_1 - y_0 = - \frac{(y_0 + 3x_0^2 y_0^3)}{3x_0^3 y_0^2 + x_0} \cdot (-x_0)$$

$$y_1 = \frac{y_0 + 3x_0^2 y_0^3}{3x_0^3 y_0^2 + 1} + y_0 = \frac{2y_0 + 6x_0^2 y_0^3}{3x_0^3 y_0^2 + 1} = 2y_0$$

$$A = (0, y_1)$$

CORTE EN EL EJE X (y=0)

$$x_1 - x_0 = + \frac{(y_0 + 3x_0^2 y_0^3)}{3x_0^3 y_0^2 + x_0} (x_1 - x_0)$$

$$\frac{3x_0^3 y_0^2 + x_0}{1 + 3x_0^2 y_0^2} + x_0 = x_1$$

$$x_1 = \frac{2x_0 + 6x_0^3 y_0^2}{1 + 3x_0^2 y_0^2} = 2x_0$$

⇒

$$B = (x_1, 0)$$

P.D.Q.: $P = \frac{A+B}{2} =$ ~~$(\frac{0+x_1}{2}, \frac{y_1+0}{2})$~~

$$P = \left(\frac{2x_0}{2}, \frac{2y_0}{2} \right) = (x_0, y_0) //$$

AUX EXTRA

P10

(i)

$$\bullet \left(\frac{2n-1}{2n+1} \right)^n = \left(\frac{1 - \frac{1}{2n}}{1 + \frac{1}{2n}} \right)^n = \frac{\left(1 + \frac{(-1/2)}{n} \right)^n}{\left(1 + \frac{(1/2)}{n} \right)^n}$$

DIVIDIENDO
ARRIBA
Y ABAJO
POR $2n$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-1/2}}{e^{1/2}} = \boxed{\frac{1}{e}}$$

$$\bullet \frac{(-n)^n}{(n-1)^{n+1}} = (-1)^n \left(\frac{n}{n-1} \right)^n \cdot \left(\frac{1}{n-1} \right)$$

$(-1)^n$ está acotada

$$\left(\frac{n}{n-1} \right)^n = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{(-1)}{n} \right)^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-1}} = e.$$

$$\frac{1}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow \frac{(-n)^n}{(n-1)^{n+1}} \rightarrow 0.$$

$$\bullet \frac{\sqrt{n^6+n^3} - \sqrt{n^6-n^2}}{\left(\sqrt{n^6+n^3} + \sqrt{n^6-n^2} \right)} \cdot \left(\sqrt{n^6+n^3} + \sqrt{n^6-n^2} \right)$$

$$= \frac{\cancel{n^6} + n^3 - \cancel{n^6} + n^2}{\left(\sqrt{n^6+n^3} + \sqrt{n^6-n^2} \right)} = \frac{n^3 + n^2}{\sqrt{\cdot} + \sqrt{\cdot}} \quad \frac{1/n^3}{1/n^3} = (10) \text{ etc}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^3}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^4}}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + 0}{1 + 1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

(iii) Calculando la derivada se tiene que.

$$f'(x) = (\arcsin(2x-1))' + 2(\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{1-x}{x}}))'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + 2 \cdot \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right)'$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} + \frac{2}{1 + \frac{1-x}{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \cdot \left(\frac{1-x}{x}\right)'$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1-4x^2+4x-1}} + \frac{\cancel{2}x}{1} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{1-x}} \cdot \left(-\frac{x}{x^2} - \frac{(1-x)}{x^2}\right)$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sqrt{x(1-x)}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot -1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}$$

$$\therefore \forall x \in (0,1) \quad f'(x) = 0$$