MA1001, Introducción al Cálculo
Trigonometría y Funciones
5 de mayo, 2010
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliares: Benjamín Obando,Ignacio Vergara

1. Grafique la función:
$$f(x) = \mid 1 - 2\cos(x+\pi) \mid -1$$

Solución:

$$f(x) = \mid 1 + 2\cos(x) \mid -1$$

(i)Paridad:$f(-x) = \mid 1 + 2\cos(-x) \mid -1 = \mid 1 + 2\cos(x) \mid -1 = f(x)$. Así f es par.

(ii)Periodicidad: $f(x+2\pi) = \mid 1 - 2\cos(x+2\pi) \mid -1 = \mid 1 + 2\cos(x) \mid -1 = f(x)$.Así f es de periódo 2π.

(iii) Máximos y Mínimos: $Max(f) = 2$ cuando $\cos(x) = 1 \Rightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $Min(f) = -1$ cuando $1 + 2\cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(iv)Ceros de f: $f(x) = 0 \Rightarrow \mid 1 + 2\cos(x) \mid -1 = 0 \Rightarrow \cos(x) = \frac{-1\pm1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}(2k+1), k \in \mathbb{Z}, x = 2k\pi + \pi, k \in \mathbb{Z}$.

(v)Hacer el gráfico(propuesto).

2. Resuelva las siguientes ecuaciones trigonométricas:

   a)
$$\sqrt{2}\sin(x) = 1 - \sqrt{2}\cos x$$

   b)
$$\frac{1-\tan x}{1+\tan x} = 1 + \sin(2x)$$

Solución:

(i)
$$\sqrt{2}\sin(x) = 1 - \sqrt{2}\cos x \mid \cdot\frac{1}{2}$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x$$
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{1}{2}$$

Teniendo en cuenta que $\cos(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Podemos transformar la ecuación en:

$$\cos(\frac{\pi}{4})\sin(x) + \sin(\frac{\pi}{4})\cos x = \frac{1}{2}$$

Usando la propiedad $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ podemos transformar la ecuación en:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$$

Y ya que $\sin(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$.Tenemos que:

$$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{6})$$

Así:

$$x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

(ii)

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = 1 + \sin(2x)$$

Para este problema debemos considerar las siguientes propiedades trigonométricas $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ y $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$. Así remplazamos en la ecuación:

$$\frac{1 - \frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = 1 + 2\cos(x)\sin(x)$$

$$\Rightarrow \sin(x)(2 + 2(\cos(x))^2 + \sin(2x)) = 0$$

Así debemos resolver $\sin(x) = 0$ y $2 + 2(\cos(x))^2 + \sin(2x) = 0$. Pero notemos que $2 + 2(\cos(x))^2 + \sin(2x) \neq 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$. Así la solución de la ecuación esta dada solo por $\sin(x) = 0$ $\Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.