MA1001, Introducción al Cálculo
Cónicas
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliares: Benjamín Obando,Ignacio Vergara

1. Para la circuferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ $(r > 0)$ y el punto $P = (\alpha, 0)(\mid \alpha \mid > r)$ determinar las rectas tangentes que pasan por P.

2. Determine el lugar geométrico de todos los puntos tales que el cuociente entre la distancia al punto $Q = (1, 1)$ y la distancia a la recta de ecuación $x + 1 = 0$ sea igual a 1.

3. Hallar la ecuación del lugar geometrico de los puntos del plano tal que su distancia al punto $A = (1, 0)$ sea igual al triple de su distancia a la recta $x - 2 = 0$.

4. *a*) Sea L una recta no vertical de ecuación $y = mx + n$, sean A,B,Cy D cuatro puntos de ella y a_1,b_1,c_1y d_1, sus abscisas, respectivamente $(A = (a_1, a_2))$. Demostrar que

$$d(A, B) = d(C, D) \Leftrightarrow \mid a_1 - b_1 \mid = \mid c_1 - d_1 \mid$$

   b) 1) Determinar para qué valores de m,una recta L con pendiente m que pasa por el punto $(-1, 0)$ intersecta a la rama derecha de la hipérbola de ecuación $x^2 - y^2 = 1$

   2) Deducir que la interseccion ocurre en el punto $P = (\frac{1+m^2}{1-m^2}, \frac{2m}{1-m^2})$.

   c) Sea la recta L de ecuación $y = m(x + 1)$,con $m \geq 0$ y tal que L intersecte a la rama derecha de la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ en un punto P.

   1) Determinar el punto R de la interseccion de L con la recta de ecuación $y = -x$ y el punto S la intersección de L con la recta de ecuación $y = x$.

   2) Demostrar que $d((-1, 0), R) = d(S, P)$.

5. Considere la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ con $r > 0$. Considere O como el origen del sistema de cordenadas.

   a) Si P es un punto de la circunferencia de cordenadas (x_0, y_0) y $x_0 \neq 0$. Encontrar la ecuación de la recta L que pasa por P y es perpendicular a $\overline{OP}$.

   b) Calcule las cordenadas del punto Q donde la recta L intersecta el eje OX en función de x_0 y de r.

   c) Encuentre la ecuación de la elipse centrada en O que tiene por directriz a la recta vertical por Q y por el foco al punto de cordenadas $(x_0, 0)$.

6. Encuentre el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan del origen y de los puntos de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 + 4x = 0$.

7. Sea L la recta tangente a la parábola $y^2 = 4px$ por $P = (x_0, y_0)$. que corta al eje OY en B, a la directriz en C y la recta vertical por el foco F en A.

   a) Demostrar que $AF = CF$

   b) Demostrar que FB es perpendicular a L.

8. Sea A un punto que se mueve sobre de la parábola de ecuación $y^2 = 4px$ cuya proyección sobre el eje OY es B. Determinar el lugar geométrico de la intersección de las rectas que pasan por los puntos B y por el foco de la parábola y por el origen y el punto A.

9. Dada la parábola de ecuación $y^2 = 4p(x-p)$ con $p > 0$ determine los puntos P y Q,(P con cordenadas positivas) de ella, de modo que las rectas tangentes a la parábola que pasan por estos puntos pasen por el origen. Calcule la distancia de P a la tangente que pasa por Q.

10. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. La recta $y = \frac{b}{a}x$ intersecta a la elpise en los puntos P y R (P con cordenadas positivas). Determinar el área del rectángulo insctrito en la elipse, que tiene como diagonal PR.

11. Sea la hipérbola H de ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ y un punto P cualquiera de ella. Considere el triangulo formado al intersectar las asintotas de H con la tangente a H que pasa por P.Demuestre que el area del triangulo es ab.

12. Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ y $P = (x_0, y_0)$ un punto de esta. Sea L_1 la recta que pasa por P y el origen, L_2 la recta que es tangente a la elipse en el punto P y es perpendicular a la recta L_3 que pasa por el punto Q que es la intersección de la recta L_1 con la directriz derecha de la elipse. Demuestre que la recta L_3 corta al eje OX en el foco derecho de la elipse.