

MA1001, Introducción al Cálculo
Axiomas
Profesor : Raúl Uribe
Auxiliares: Benjamín Obando, Ignacio Vergara

1. Demuestre que $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

$$(a^2)^{-1} = (a^{-1})^2$$

Solución:

Para realizar esta demostración debemos notar que la pregunta se reduce a probar que a^2 es el inverso multiplicativo de $(a^{-1})^2$. Así debemos probar que $a^2(a^{-1})^2 = 1$. Lo cual se demuestra con los axiomas de los reales. Para esto debemos tener en consideración que $a^2 = aa$ y que $(a^{-1})^2 = a^{-1}a^{-1}$ por definición de un número al cuadrado. Así:

$$\begin{aligned} a^2(a^{-1})^2 &= aa(a^{-1}a^{-1}) = a(aa^{-1})a^{-1} / \text{Asociatividad} \\ &= a1a^{-1} / \text{Opuestos} \\ &= aa^{-1} / \text{Neutro} \\ &= 1 / \text{Opuestos} \end{aligned}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

2. Demuestre que $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si $(a + b)^{-1} = 1$. Entonces se tiene que:

$$(ab)^{-1} = (a^{-1} + b^{-1})$$

Solución:

Para realizar esta demostración nuevamente debemos notar que la pregunta se reduce a demostrar que ab es el inverso multiplicativo de $a^{-1} + b^{-1}$. Para esto deberemos en algún momento de la demostración usar como hipótesis que $a + b = 1$. Es importante pensar que habitualmente dada la forma de la pregunta se podría pensar que de la expresión $a + b = 1$ podríamos transformar esa expresión multiplicando a ambos lados por algo para llegar a demostrar lo que queremos, pero eso no es un buen camino si es que no se sabe por lo que hay que multiplicar ($a^{-1}b^{-1}$). Por esto realizamos la demostración más ortodoxa y recomendable (por lo menos de mi parte). Así tenemos que demostrar que $ab(a^{-1} + b^{-1}) = 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} ab(a^{-1} + b^{-1}) &= a(b(a^{-1} + b^{-1})) / \text{Asociatividad} \\ &= a(ba^{-1} + bb^{-1}) / \text{Distributividad} \\ &= a(ba^{-1} + 1) / \text{opuestos} \\ &= a(a^{-1}b + 1) / \text{Conmutatividad} \\ &= aa^{-1}b + a1 / \text{Distributividad} \\ &= 1b + a1 / \text{Opuestos} \\ &= b + a / \text{Neutro} \\ &= a + b / \text{Conmutatividad} \end{aligned}$$

$$= 1/Hipotesis$$

Que es lo que queriamos demostrar.

Demostración Alternativa:

Sabemos que $a + b = 1$. Multiplicamos a ambos lados por $a^{-1}b^{-1}$. Así

$$(a + b)a^{-1}b^{-1} = 1a^{-1}b^{-1}$$

$$aa^{-1}b^{-1} + ba^{-1}b^{-1} = 1a^{-1}b^{-1}/Distributividad$$

$$aa^{-1}b^{-1} + a^{-1}bb^{-1} = 1a^{-1}b^{-1}/Conmutatividad$$

$$1b^{-1} + 1a^{-1} = 1a^{-1}b^{-1}/Opuestos$$

$$b^{-1} + a^{-1} = a^{-1}b^{-1}/Neutro$$

$$a^{-1} + b^{-1} = a^{-1}b^{-1}/Conmutatividad$$

$$a^{-1} + b^{-1} = (ab)^{-1}/Definicion$$