Guía Exámen

sbh

1.- a) (4 puntos) Analice completamente la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

b) Si $ax + \frac{b}{x} \geq c$ demuestre que $ab \geq \frac{c^2}{4}$

con a,b,c >0 (2 puntos)

2.- a) Determine los siguientes límites

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sec(x) - \tan(x))$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (\tan(x))^{sen(2x)}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^3 (e^x - 1)}{(1 - \cos(2x))^2}$$

b) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva

$$y = x^{\frac{1}{x}} \sqrt{\left(\frac{x}{1+x}\right)}$$

en el punto $(1,e)$

3.- Dada la función

$$\left(x^3+x^2-2\right)^{\frac{1}{3}}-2x$$

Indicar su dominio, su recorrido, establecer si es par o impar, ceros, estudiar la derivabilidad, averiguar si su gráfico tiene alguna asíntota, estudiar los intervalos donde es creciente o decreciente y hacer un bosquejo de su gráfico.

4.-

a) Si $x=y^2+y$ $\qquad u=\left(x^2+x\right)^{\frac{3}{2}}$

determine $\dfrac{dy}{du}$ **(2 puntos)**

b) Se desea construir un estanque con forma de cilindro circular recto que tiene una capacidad total de V litros. Determine sus dimensiones para emplear la mínima cantidad de material. **(2 puntos)**

c) Obtenga $\dfrac{dy}{dx}$ a partir de la siguiente expresión **(2 puntos)**:

$$sen(xy)+\cos(y/x)=1$$

5.- a) Sean $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ dos puntos de la parábola $y=ax^2+bx+c$ y sea $P_3(x_3,y_3)$ el punto del arco P_1P_2 en el cual la tangente es paralela a la cuerda P_1P_2 Determine x_3 en función de x_1 y x_2. **(2 puntos)**

b) Determine los siguientes límites (puede utilizar L'Hospital cuando esté en las formas en que se pueda aplicar) **(4 puntos)**

$$\lim_{x\to 1^+}(x-1)^{\ln x} \qquad \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x\left(x^2-2x+4\right)^2-16}{\sqrt{\left(2e^{2x}-x-2\right)}}$$

6.- (3.0) a) Sea **f** una función diferenciable y **h** la función definida por

$$h(x) = \cos^2\left(x^2 f\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

$$x \neq 0$$

$$h(0) = 1$$

Obtenga **h'(x)** en términos de **f** y **f '**.
Obtenga **(hof)'(x)**
Compruebe su resultado usando **f(x)=x²sen(1/x)**

(3.0) b) Un recipiente semi-esférico de radio r [cm] está lleno de agua hasta una altura x [cm], siendo el volumen de ésta

$$V = \pi\left[r - \left(\frac{x}{3}\right)\right]x^2$$

¿A qué velocidad aumenta el volumen, al elevar el nivel de agua?

7.- i.- Sea $f(x) = \dfrac{|x-e|}{x}$

(0.5) a) Cálcule $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$

(0.5) b) Analice la continuidad de f en el intervalo [-[illegible], e]

(2.0) c) Obtenga los valores de x tales que $f(x) > x/e$. Determine el intervalo.

ii.- (0.3) Cálcule, sin derivar. Revise cada caso.

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{|ax-1| - |ax+1|}{x}, a > 0$$

8.-

i) (2.0) Si para todo valor positivo de x, siendo a,b,c constantes positivas, demuestre que

$$ab \geq \frac{c^2}{4}$$

ii) (2.0) Determine $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ a partir de las siguientes ecuaciones paramétricas:

a) $x = \dfrac{t-1}{t+1}$, $y = \dfrac{t+1}{t-1}$

b) $x = \dfrac{1}{t^2}$, $y = \sqrt{t^2 + a}$

c) (2.0)

a.- $\lim\limits_{x \longrightarrow a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}, para\ f(x) = \dfrac{1}{x}\ \ y\ a \neq 0$

b.- $\lim\limits_{x \longrightarrow 16} \dfrac{4 - \sqrt{s}}{s - 16}$

c.- $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{\sqrt[3]{1 + cx} - 1}{x}, con\ c\ \in\ R$

9.- (6.0) Demuestre, de manera análitica (no-numérica) que es imposible maximizar la suma de dos números reales, si su producto es 4. Revise sus resultados con ejemplos numericos simples. De un par de ejemplos que avalen sus resultados.