Introducción al Cálculo - Control 4

Pauta

P1 (a) $A=\{x\in\mathbb{Q} / x(x^2-2)\leq 0\}$

A es el conjunto de racionales incluidos en el conjunto solución de $x(x^2-2)\leq 0 \iff x(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})\leq 0$. de puntos críticos $-\sqrt{2}$, 0 y

(1.0) Sigue que $A=\{(-\infty,-\sqrt{2})\cup[0,\sqrt{2}]\}\cap\mathbb{Q}$

A no es acotado inferiormente pues $\mathbb{Q}$, denso en $\mathbb{R}$, no lo es

(0.5) Entonces A no posee ínfimo ni mínimo.

A es acotado superiormente por $\sqrt{2}$ y el conjunto de las

(0.5) cotas superiores es $[\sqrt{2},\infty)$

Entonces $\text{Sup}(A)=\sqrt{2}$, pero $\text{máx}(A)$ NO EXISTE pues $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$

(1.0) es decir $\sqrt{2}\notin A$ y el máximo cuando existe es igual al supremo

b) $B=\left\{(-1)^n\frac{1+n^2}{2+n^2} / n\in\mathbb{N}\right\}$. Demostrar que $\sup(B)=1$

Claramente $B\neq\emptyset$ y B es acotado superiormente por 1

(0.5) En virtud del Axioma del Supremo, EXISTE $\text{Sup}(B)$

Además B contiene elementos positivos y negativos, según la paridad de $n\in\mathbb{N}$ y por lo tanto $\text{Sup}(B)>0$, pues de no ser así

(0.5) $(\text{Sup}B\leq 0)$ $\exists x\in B$, $x>0$ tal que $\text{Sup}B<x\in B$ →←

Entonces basta estudiar $\text{Sup}(B)$ para n par, es decir,

$\text{Sup}(B)=\text{Sup}\left\{(-1)^{2n}\frac{1+4n^2}{2+4n^2}\right\}=\text{Sup}\left\{\frac{1+4n^2}{2+4n^2} / n\in\mathbb{N}\right\}$

$\text{Sup}(B)=1$. Si suponemos que esto no es cierto, entonces

(1.0) existe $\varepsilon>0$ tal que $1-\varepsilon>\frac{1+4n^2}{2+4n^2}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

Es decir $1-\frac{1+4n^2}{2+4n^2}>\varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2+4n^2}>\varepsilon$ Mayorando $\frac{1}{n}>\frac{1}{2+4n^2}$

(1.0) Pero, por la propiedad Arquimediana, $\forall\varepsilon>0$, $\exists n_0\in\mathbb{N}$ tal que $n_0\cdot\varepsilon>1$

es decir $\frac{1}{n_0}<\varepsilon$ lo cual es una contradicción. Así, $\text{Sup}(B)=1$

P2 (a) $\lim \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) \left|\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right| < \varepsilon$

Se estudia $\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right| = \dfrac{\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}} - 1\right|\left|\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right|}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} = \dfrac{\cancel{1}+\frac{1}{n} \cancel{-1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$

(1.5) $\leq \dfrac{1/n}{2} \leq \dfrac{1}{n}$

Entonces para completar la demostración, basta con estudi[ar] la proposición auxiliar $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

(0.5) y esta proposición es cierta en virtud de la propiedad arquim[ediana]

b) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2(n-1)}{n^3-1} + \dfrac{10}{n!}\operatorname{sen}(n^4) - \dfrac{6n^5+2n-3}{5-2n^5}}{\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \dfrac{n^n}{2n^n - n!} - \dfrac{(1000)^n}{n!}}$$

Cada término del numerador y del denominador se puede estudiar por separado y luego aplicar álgebra de límites.

(0.4) $\dfrac{2(n-1)}{n^3-1} \to 0$ cuociente de polinomios con grado numerador inferior al grado del denominador.

$\dfrac{10}{n!}\operatorname{sen}(n^4) \to 0$ nula por acotada.

(0.4) $\dfrac{6n^5+2n-3}{5-2n^5} \to -\dfrac{6}{2} = -3$ cuociente de polinomios de igual grado.

$\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+1} \to 0$ nula por acotada.

(0.4) $\dfrac{n^n}{2n^n - n!} = \dfrac{1}{2 - \frac{n!}{n^n}} \to \dfrac{1}{2}$ donde $\frac{n!}{n^n} \to 0$ propuesto en clases.

(0.4) $\dfrac{(1000)^n}{n!} \to 0$ propuesto en clases, $\frac{a^n}{n!} \to 0 \quad a \in \mathbb{R}$

(0.4) Sigue que $\lim(\cdot/.) = \dfrac{0+0-(-3)}{0+1/2-0} = 6$.

(2.0) { c) Basta recordar que el producto de nula por acotada es nula. Sigue que $b_n \cdot \frac{a_n}{b_n} \to 0$ (nula por acotada) pero $b_n \frac{a_n}{b_n} = a_n \to 0$ (nul[a]