

Pauta Guía Problemas: Semana 5

Profesor: Jorge San Martín H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2}$

- (a) Determine $A = \text{Dom } f$, recorrido y paridad.
- (b) Encuentre los ceros y signos de f .
- (c) Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento.
- (d) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.
- (e) Determine el mayor conjunto B , $B \subseteq A = \text{Dom } f$ tal que $f : B \rightarrow f(B)$ sea biyectiva, y calcule $f^{-1}(x)$.
- (f) Bosqueje el gráfico de f y de $|f|$.

Solución:

- (a) Buscamos el mayor conjunto A , donde la función f quede bien definida. Para esto, debemos notar en primer lugar que la función se indefine cuando el argumento de la raíz es negativo, por lo que debemos imponer que los elementos $x \in A$ cumplan:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 &\geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Como $|x|$ no crea restricciones adicionales al conjunto de partida, terminamos concluyendo que $A = \text{Dom } f = [-1, 1]$. Ahora, buscamos el recorrido de la función f . Para esto, acotemos $f(x)$.

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| - \sqrt{1 - x^2} \\ &\leq |x| \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

La última desigualdad pues $x \in [-1, 1]$. Acotemos por el otro lado:

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| - \sqrt{1 - x^2} \\ &\geq -\sqrt{1 - x^2} \\ &\geq -1 \end{aligned}$$

La última desigualdad porque $-\sqrt{x}$ es decreciente. Así, tenemos que para cualquier x en el dominio de f , $f(x) \in [-1, 1]$. Por lo tanto $\text{Rec } f = [-1, 1]$.

Finalmente, veamos qué pasa con $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x| - \sqrt{1 - (-x)^2} \\ &= |x| - \sqrt{1 - x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f es par.

- (b) Los ceros de f corresponden a todos los $x \in A$ tales que $f(x) = 0$, que podemos encontrar imponiendo esta última igualdad, y despejando los valores de x que la verifican:

$$\begin{aligned}
 & |x| - \sqrt{1-x^2} = 0 \\
 \Leftrightarrow & |x| = \sqrt{1-x^2} \\
 \Leftrightarrow & x^2 = 1-x^2 \\
 \Leftrightarrow & 2x^2 = 1 \\
 \Leftrightarrow & x^2 = \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}
 \end{aligned}$$

Ya encontrados los ceros de la función, analicemos los signos de ésta. Para encontrarlos, debemos resolver las inecuaciones $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, que se traducen en:

$$|x| - \sqrt{1-x^2} > 0 \quad (1)$$

$$|x| - \sqrt{1-x^2} < 0 \quad (2)$$

Desarrollemos (1), que nos dará los valores de x para que $f(x)$ sea positiva:

$$\begin{aligned}
 & |x| - \sqrt{1-x^2} > 0 \\
 \Leftrightarrow & |x| > \sqrt{1-x^2} \\
 \Leftrightarrow & x^2 > 1-x^2 \\
 \Leftrightarrow & 2x^2 > 1 \\
 \Leftrightarrow & x^2 > \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow & |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \\
 \Leftrightarrow & x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]
 \end{aligned}$$

Al desarrollar (2), el proceso algebraico es el mismo, pero se termina concluyendo que los valores de x para los cuales $f(x)$ es negativa, son:

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- (c) Sean $x_1, x_2 \in A$, tales que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Reconstruyamos la función, de forma que podamos analizar el crecimiento o decrecimiento de ella:

$$\begin{aligned}
 x_1 < x_2 & \Rightarrow x_1^2 < x_2^2 \\
 \Leftrightarrow & -x_1^2 > -x_2^2 \\
 \Leftrightarrow & 1-x_1^2 > 1-x_2^2 \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{1-x_1^2} > \sqrt{1-x_2^2} \\
 \Leftrightarrow & -\sqrt{1-x_1^2} < -\sqrt{1-x_2^2} \\
 \Leftrightarrow & |x_1| - \sqrt{1-x_1^2} > |x_2| - \sqrt{1-x_2^2} \\
 \Leftrightarrow & f(x_1) < f(x_2)
 \end{aligned}$$

- (d) Claramente de la parte (b), f no es sobreyectiva, pues $\text{Rec } f = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$. Notemos que siempre se puede cambiar una función f no epiyectiva, por una función g tal que su conjunto de llegada sea el recorrido de f , es decir,

$$\begin{aligned}
 g : A & \rightarrow f(A) \\
 x & \mapsto f(x)
 \end{aligned}$$

Que resulta ser epiyectiva. Podríamos llamar a g la «sobreyectización» de f .

Veamos que f no es inyectiva. Esto resulta claro del hecho que f es par y por lo tanto $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in A$.

Nota: Toda función par es no inyectiva.

- (e) Notemos que si restringimos f al conjunto $B = [0, 1]$, resulta ser inyectiva (deja de ser par). Además como cambiamos el conjunto de llegada a $f(A) = \text{Rec } f$. Tenemos entonces que $\tilde{f} : B \rightarrow f(A)$ es biyectiva.

Nota: Cambiamos de nombre a f por $\tilde{f}$, pues dos funciones para ser iguales deben tener mismo dominio y mismo recorrido, así, si restringimos f a un conjunto menor que su dominio, obtenemos una nueva función, que resulta ser igual en todo punto a f pero que no es f .

Para encontrar la inversa debemos encontrar $x \in A$ tal que $y = f(x)$, para esto debemos resolver la siguiente ecuación en x

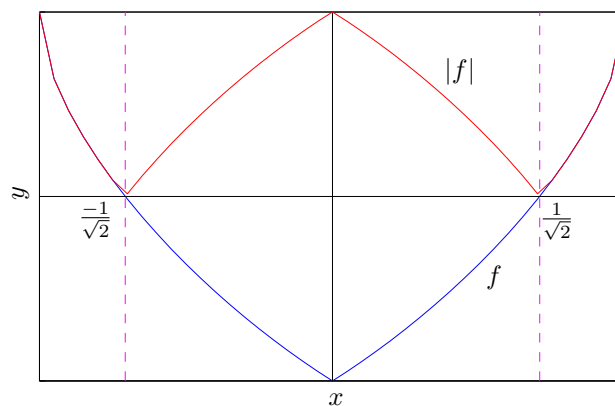
$$\begin{aligned} y &= x - \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow \sqrt{1 - x^2} = x - y \\ &\Leftrightarrow 1 - x^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - xy - \frac{y^2 - 1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{2 - y^2}}{2} \end{aligned}$$

Notemos que aquí tenemos dos soluciones. Debemos descartar una pues la inversa, de existir, debe ser única. Para esto notemos que si tomamos $y = -1 \in f(A)$ en la solución negativa obtenemos que $x = -1 \notin B$. Entonces concluimos que la función inversa es

$$\begin{aligned} f^{-1} : f(A) &\rightarrow A \\ x &\mapsto \frac{x + \sqrt{2 - x^2}}{2} \end{aligned}$$

Notemos que si tomamos $B = [-1, 0]$ tendríamos que ocupar la solución negativa, pues si tomáramos la positiva $y = 1 \in f(A) \Rightarrow x = 1 \notin B$. Esto no contradice el hecho de que la inversa es única, pues a ambas inversas tienen dominios distintos.

- (f) Gráfico de f



P2. Sea $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$.

- Encuentre su dominio A , ceros y signos.
- Pruebe que f es inyectiva.
- Pruebe que el recorrido de f es $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
- Encuentre la función inversa de $f : A \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ y explicita su dominio y recorrido.

Solución:

- (a) Notamos que la única restricción para el dominio de esta función es que el denominador no puede valer cero, ya que la división quedaría indefinida, por lo tanto $A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-1}{2} \right\}$.
Calculamos los ceros de la función tal como en el P1, imponiendo $f(x) = 0$:

$$\frac{x+1}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Teniendo esto, para encontrar los signos de f , basta notar que $\forall x \in (-\infty, -1)$, $f(x) < 0$; y que $\forall x \in (-1, +\infty)$, $f(x) > 0$.

- (b) Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Probemos que esto implica necesariamente que $x_1 = x_2$. En efecto:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \frac{x_1+1}{2x_1+1} = \frac{x_2+1}{2x_2+1} \\ &\Rightarrow (x_1+1)(2x_2+1) = (x_2+1)(2x_1+1) \\ &\Leftrightarrow 2x_1x_2 + x_1 + 2x_2 + 1 = 2x_1x_2 + x_2 + 2x_1 + 1 \\ &\Leftrightarrow x_1 + 2x_2 = x_2 + 2x_1 \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

Nota: La implicancia de la segunda línea no es equivalencia, ya que esto es cierto sólo en el caso de $x_1, x_2 \in A$

- (c) Para responder esta pregunta, podemos considerar la función como $y = \frac{x+1}{2x+1}$, despejar x en función de y para así obtener la inversa f^{-1} (entre comillas, porque aún no sabemos si f es biyectiva), y analizar su dominio, que será precisamente el recorrido de f . Siendo así, tenemos:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{2x+1} &\Rightarrow y(2x+1) = x+1 \\ &\Leftrightarrow 2xy + y = x+1 \\ &\Leftrightarrow x(2y-1) = 1-y \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1-y}{2y-1} \end{aligned}$$

Así, es claro que la única restricción es que y sea distinto de $\frac{1}{2}$, por lo tanto, $\text{Rec } f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

- (d) Con todo lo encontrado previamente, tenemos que la función inversa de f es aquella tal que:

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\rightarrow A \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1}, \end{aligned}$$

con $B = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, y A el dominio de f , encontrado en a).

P3. Sea la fórmula $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}}$.

- (a) Determine el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, que a x le asocia $f(x)$, sea una función.
- (b) Encuentre los ceros de f y determine sus signos.
- (c) Determine la paridad y periodicidad de f .
- (d) Determine la inyectividad y biyectividad de f .
- (e) Encuentre los intervalos donde f crece y aquellos donde f decrece.
- (f) Grafique f .

Solución:

- (a) Tal como en las preguntas anteriores, busquemos las posibles indefiniciones de la función, para así sacarlas del dominio de ella. Imponiendo que el argumento de la raíz sea mayor o igual a cero, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{x+1} \geq 0 &\Leftrightarrow \frac{x+1-2}{x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$

Notemos que la otra restricción de la función, $x \neq -1$ (para que la fracción no sea dividida por cero) ya está presente en el conjunto encontrado, por lo tanto $A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

- (b) Imponiendo $f(x) = 0$, el(los) valor(es) de x que lo cumple(n) es(son):

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}} = 0 &\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 = \frac{2}{x+1} \\ &\Rightarrow x+1 = 2 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Tal como en la pregunta anterior, la presencia de la implicancia se debe a que esto sólo es verdad cuando x pertenece al dominio de la función.

Ahora, notemos que para encontrar los puntos donde $f(x) > 0$, en el desarrollo de la inecuación correspondiente, llega un punto donde debemos resolver la misma que en la parte a), por lo tanto, concluimos que la función es positiva en todo su dominio, y por ende, nunca es negativa.

- (c) Veamos qué ocurre con $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{1 - \frac{2}{1+(-x)}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{2}{1-x}} \neq f(x) \neq -f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función no es par ni impar.

Para ver si f es periódica, debemos encontrar $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f(x+p) = f(x)$. Entonces resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} f(x+p) = f(x) &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}} = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x+p}} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{1+x} = 1 - \frac{2}{1+x+p} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{1+x} = \frac{2}{1+x+p} \\ &\Rightarrow 1+x = 1+x+p \\ &\Leftrightarrow p = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función tampoco es periódica.

- (d) La función es claramente no sobreyectiva, ya que para ningún $y \in \mathbb{R}^-$ existe un x tal que $y = f(x)$. Veamos si es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, y desarrollemos:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{x_1+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{x_2+1}} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x_1+1} = 1 - \frac{2}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x_2+1} = \frac{2}{x_1+1} \\ &\Rightarrow 2(x_1+1) = 2(x_2+1) \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2 \end{aligned}$$

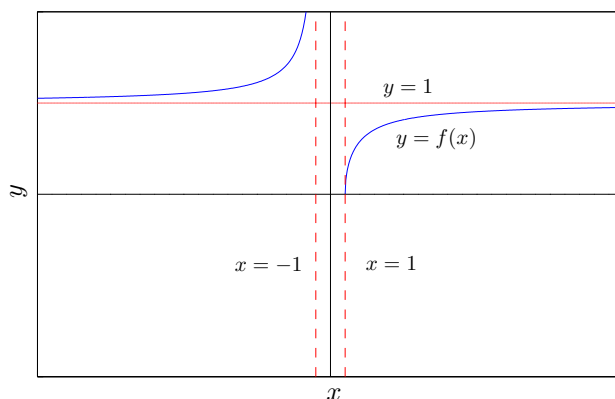
Así, concluimos que f es inyectiva, pero no sobreyectiva.

- (e) Sean $x_1, x_2 \in A$, tales que $x_1 < x_2$. Busquemos reconstruir la función, para ir analizando sus zonas de crecimiento y decrecimiento:

$$\begin{aligned}
 x_1 < x_2 &\Leftrightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{x_1 + 1} > \frac{1}{x_2 + 1} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2}{x_1 + 1} > \frac{2}{x_2 + 1} \\
 &\Leftrightarrow -\frac{2}{x_1 + 1} < -\frac{2}{x_2 + 1} \\
 &\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{x_1 + 1} < 1 - \frac{2}{x_2 + 1} \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{x_1 + 1}} < \sqrt{1 - \frac{2}{x_2 + 1}} \\
 &\Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)
 \end{aligned}$$

Y viendo que lo anterior es válido para todo $x \in A$, concluimos que la función es creciente en todo su dominio, y por ende, jamás decreciente.

- (f) Gráfico de f



P4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, y la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & \text{si } x \geq 0 \\ x + \beta & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

- (a) Demuestre que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$.
 (b) Demuestre que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$.
 (c) ¿Cuál es el conjunto $B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid f \text{ es biyectiva}\}$?

Solución:

- (a) Una función f es epiyectiva, ssi todo elemento en su codominio tiene una preimagen en el dominio de ella. En este caso, para que f sea epiyectiva, necesitamos que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
 Notemos que, para poder trabajar con los intervalos que definen a la función, podemos escribir $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$. Así, tenemos:

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty, 0) \cup [0, +\infty)) = f((-\infty, 0)) \cup f([0, +\infty)) = (-\infty, \beta) \cup [\alpha, +\infty)$$

Punto en el que notamos que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$, para que ningún valor de x se salga de la unión de los intervalos, y así obtengamos todo $\mathbb{R}$.

(b) Para este caso, probemos la doble implicancia:

$\Rightarrow$) Tenemos que f es inyectiva, con lo que debemos probar que $\alpha \geq \beta$. Razonemos por contradicción, vale decir, supongamos que f es inyectiva y que $\alpha < \beta$. Entonces, tendríamos que $\alpha - \beta < 0$ y luego $f(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) + \beta = \alpha = f(0)$.

Como f es inyectiva, y $f(\alpha - \beta) = f(0)$, deberíamos concluir que $\alpha - \beta = 0$, contradiciendo nuestra suposición inicial; por lo tanto $\alpha \geq \beta$.

$\Leftarrow$) Ahora debemos tomar como hipótesis que $\alpha \geq \beta$, y con esto probar que f es inyectiva. De la definición de f , notamos que es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $[0, +\infty)$ por separado, y como $\alpha \geq \beta$, también es creciente al pasar de uno al otro. Por lo tanto, la función es inyectiva.

Así, probadas las dos implicancias, concluimos que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$.

(c) Sabemos que f es biyectiva ssi f es inyectiva y epiyectiva a la vez, y claramente, de lo obtenido en a) y en b), ambas condiciones se cumplen cuando $\alpha = \beta$. Por lo tanto, el conjunto buscado es:

$$B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \beta\}$$

P5. Sea la función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}, |g(x)| \leq |x|$.

Solución:

Observando la definición de la función, notamos en forma directa que debemos separar el estudio de ella en dos casos, $x \in \mathbb{Q}$, o bien $x \notin \mathbb{Q}$. Partamos por este último, notando que $g(x) = 0$ para cualquier x en esta situación, por lo que $|g(x)| = 0$, que claramente es siempre menor que $|x|$ (ya que $0 \in \mathbb{Q}$).

En el caso de $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = x$, de donde rápidamente concluimos que $|g(x)| = |x|$.

Finalmente, uniendo ambos casos estudiados, y recordando que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$, se llega a la conclusión de que:

$$|g(x)| \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$