1) Sumar un real a ambos lados de una igualdad

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tq $x = y$

Por existencia y unicidad del inverso, $(-y)$ es inverso de x

$\Rightarrow \quad x + (-y) = 0$

$x + (-y) + 0 = 0$ / elem. neutro

$x + (-y) + (a + (-a)) = 0$ / inversos

$((x + (-y)) + a) + (-a) = 0$ / asoc.

$(x + ((-y) + a)) + (-a) = 0$ / asoc.

$(x + (a + (-y))) + (-a) = 0$ / comm.

$((x + a) + (-y)) + (-a) = 0$ / asoc.

$(x+a) + ((-y) + (-a)) = 0$ / asoc.

$(x + a) - (y + a) = 0$ / propiedad por demostrar.

Se los dejo como ejercicio

$\Rightarrow -(y+a)$ es el inverso aditivo de $(x+a)$.

Por propiedad (demostrada), $-(-x) = x$

$\Rightarrow \quad (x+a) = -(-(y+a))$

$x + a = y + a$

De la misma forma se demuestra que

$\forall a \in \mathbb{R}, \quad x = y \Rightarrow a \cdot x = a \cdot y$

2) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot 0 = 0$

Debemos demostrar que $x \cdot 0$ es el neutro para la suma

Primero demostramos que $x + x \cdot 0 = 0$ $(*)$

Sea $x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
x + x\cdot 0 &= x \cdot 1 + x \cdot 0 && / \text{ neutro} \\
&= x \cdot (1 + 0) && / \text{ distr.} \\
&= x \cdot 1 && / \text{ neutro para suma} \\
&= x && / \text{ neutro para producto}
\end{aligned}
$$

$\Longrightarrow$ $x \cdot 0$ es neutro para suma

$\therefore$ $x \cdot 0 = 0$ / por unic. del inverso

Demostremos ahora que

$$a + x \cdot 0 = a \quad , \forall a \in \mathbb{R}$$

en efecto, sean $a, x \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
a + x \cdot 0 &= (a + x \cdot 0) + 0 && / \text{ neutro} \\
&= (a + x \cdot 0) + (x + (-x)) && / \text{ inversos} \\
&= a + (x \cdot 0 + (x + (-x))) && / \text{ asoc.} \\
&= a + ((x \cdot 0 + x) + (-x)) && / \text{ asoc} \\
&= a + (x + (-x)) && / \text{ por } (*) \\
&= a + 0 && / \text{ por inversos} \\
&= a && / \text{ neutro}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ $x \cdot 0$ es neutro aditivo $\forall a \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ $x \cdot 0 = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$