MA1001-1 Introducción al Cálculo. Semestre 2010-01

Profesor: Jorge San Martín Auxiliares: Natalia Ruiz - Alfredo Torrico

Soluciones

Abril de 2010

P1. (a) Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0, (x + y)(x^{-1} + y^{-1}) \geq 4.$$

Indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

*Demostración.*Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x, y > 0$.P.D.Q.: $(x + y)(x^{-1} + y^{-1}) \geq 4$

Calculemos la diferencia entre las expresiones de la derecha y de la izquierda de la proposición anterior. Tenemos

$$(x + y)(x^{-1} + y^{-1}) - 4 = \frac{(x - y)^2}{xy}$$

Como $a^2 \geq 0$ para todo real a se tiene que

$$(x - y)^2 \geq 0. \tag{1}$$

Además, como el producto en $\mathbb{R}_+^*$ es cerrado, $xy > 0$. Esto implica que $\frac{1}{xy} > 0$. Al multiplicar (1) por $\frac{1}{xy}$ se obtiene

$$\frac{(x - y)^2}{xy} \geq 0.$$

Esto finaliza la demostración. □

(b) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x > 0, x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

Hint: Analice el producto $(x - 1)^2(x + 2)$.*Demostración.* Sea $x \in \mathbb{R}, x > 0$.P.D.Q.: $x^2 + \frac{2}{x} \geq 3$.

Se tiene

$$(x - 1)^2(x + 2) = x^3 - 3x + 2.$$

Como $(x - 1)^2 \geq 0$, porque todo número real al cuadrado es no negativo, y $x + 2 > 0$, porque la suma en $\mathbb{R}_+^*$ es cerrada, se verifica

$$(x - 1)^2(x + 2) \geq 0.$$

Luego,

$$x^3 - 3x + 2 \geq 0.$$

Multiplicando esta última desigualdad por $\frac{1}{x} > 0$ se obtiene lo deseado. □(c) Demuestre que para $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$, se tiene:

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2.$$

Hint: Utilice la parte anterior.

Demostración. Sean $a, b > 0$.

P.D.Q.: $a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2$.

Dado que $b > 0$ se tiene $\frac{1}{b} > 0$ y así $\frac{a}{b} > 0$. Para probar la proposición basta considerar $x = \frac{a}{b}$ en la parte (b). $\square$

P2. (a) Sea A el conjunto solución de la inequación $|x| \leq |x - 1|$ y sea B el conjunto solución de la inequación $|4x - 2| > x(1 - 2x)$.

- Resuelva las inequaciones, esto es, determine A y B .
- Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.

Solución Resolveremos primeramente

$$|x| \leq |x - 1|.$$

Los puntos críticos de esta inequación son $x = 0$ y $x = 1$. Esto nos genera tres intervalos de análisis: $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$. El estudio de los puntos críticos lo haremos al final.

Parte 1: Si $x \in (-\infty, 0)$, la inequación queda

$$-x \leq -(x - 1) \iff 0 \leq 1.$$

La última proposición es verdadera para todo real x . Por tanto, la solución de la inequación en este intervalo es $(-\infty, 0)$.

Parte 2: Si $x \in (0, 1)$, la inequación queda

$$x \leq -x + 1 \iff x \leq \frac{1}{2}$$

Luego, la solución en este intervalo es $(0, \frac{1}{2}]$.

Parte 3: Si $x \in (1, +\infty)$, la inequación queda

$$x \leq x - 1 \iff 0 \leq -1$$

La última proposición es falsa para todo real x . Luego, el conjunto solución de la inequación en este intervalo es $\emptyset$.

De los puntos críticos sólo 0 es solución de la inequación. Por lo tanto, el conjunto solución de la inequación dada es

$$A = (-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup \emptyset \cup \{0\} = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right].$$

Ahora resolveremos la inequación

$$|4x - 2| > x(1 - 2x) \iff 2|1 - 2x| > x(1 - 2x).$$

El punto crítico de esta inequación es $x = \frac{1}{2}$. Así, los intervalos a estudiar son: $(-\infty, \frac{1}{2})$ y $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

Parte 1: Si $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$, la inequación queda

$$2(1 - 2x) > x(1 - 2x)$$

Notemos que $(1 - 2x) > 0$ en este intervalo. Así, al multiplicar la última desigualdad por $\frac{1}{1 - 2x} > 0$ se obtiene $x < 2$. Luego, la solución de la inequación en este intervalo es $(-\infty, \frac{1}{2})$.

Parte 2: Si $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$, se tiene que $1 - 2x < 0$. Luego, la inequación queda

$$2 - (1 - 2x) > x(1 - 2x) \iff x > -2.$$

Luego, la solución de la inequación en este intervalo es $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

El punto crítico $x = \frac{1}{2}$ no satisface la inequación. Por tanto,

$$B = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}.$$

Finalmente,

$$A \cup B = \mathbb{R} \quad A \cap B = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right).$$

(b) Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2}$$

Solución

Los puntos críticos de esta desigualdad son $x = 2$ y $x = -\frac{11}{2}$. Así los intervalos a analizar son $(-\infty, -\frac{11}{2})$, $(-\frac{11}{2}, 2)$ y $(2, +\infty)$.

Parte 1: Si $x \in (-\infty, -\frac{11}{2})$, la inecuación queda

$$\frac{2-x-2x-11}{x-2|x+2-x|} < \frac{1}{2} \iff \frac{-4x-7}{2(x-2)} < 0. \tag{2}$$

Como los puntos críticos de (2), $x = -\frac{7}{4}$ y $x = 2$, no pertenecen al intervalo de análisis $(-\infty, -\frac{11}{2})$, resolvemos (2) considerando sólo este intervalo. Es decir,

	$(-\infty, -\frac{11}{2})$
$-4x-7$	+
$x-2$	-
$\frac{-4x-7}{2(x-2)}$	-

Luego, la solución de la inecuación en esta parte es $(-\infty, -\frac{11}{2})$.

Parte 2: Realizando un análisis similar al de la parte 1, se obtiene que el conjunto solución de la inecuación en el intervalo $(-\frac{11}{2}, 2)$ es el mismo intervalo.

Parte 3: Si $x \in (2, +\infty)$, la inecuación queda

$$\frac{3x+9}{(x-2)2|x-1|} < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Como $x-1 > 0$ en el intervalo $(2, +\infty)$, la inecuación (2) se escribe como

$$\frac{3x+9}{(x-2)2(x-1)} < \frac{1}{2} \iff \frac{(x-7)(x+1)}{2(x-2)(x-1)} > 0.$$

Los puntos críticos de esta inecuación son -1,1,2 y 7. Como sólo 7 esta en nuestro intervalo de análisis, la tabla de signos resulta ser

	$(2, 7)$	$(7, +\infty)$
$x-7$	-	+
$x+1$	+	+
$x-2$	+	+
$x-1$	+	+
$\frac{(x-7)(x+1)}{2(x-2)(x-1)}$	-	+

Luego, la solución de la inecuación en esta parte es $(7, +\infty)$.

De los puntos críticos $x = 2$ no es solución ya que el denominador se hace cero, pero $x = -\frac{11}{2}$ si satisface la inecuación. Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación es

$$\left(-\infty, -\frac{11}{2}\right) \cup \left(-\frac{11}{2}, 2\right) \cup (7, +\infty) \cup \left\{\frac{-11}{2}\right\} = (-\infty, 2) \cup (7, +\infty).$$

(c) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 + 3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2|.$$

Solución Primero debemos notar que al lado derecho de nuestra inecuación tenemos el término $|1+x^2|$, el cual es positivo para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, nuestro análisis se reduce a lo siguiente:

$$|x^2 + 3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1+x^2| \iff |x^2 + 3x| + x|x+3| \geq 8$$

Luego de esto, podemos identificar nuestros puntos críticos, los cuales son: $x = -3$ y $x = 0$. Esto nos genera 3 intervalos de análisis, dejando para el final el estudio de nuestros puntos críticos. Los intervalos identificados son: $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$ y $(0, +\infty)$.

- $(-\infty, -3)$:

En este intervalo la inecuación nos queda:

$$\begin{aligned} |x^2 + 3x| + x|x + 3| \geq 8 &\Leftrightarrow |x(x + 3)| + x|x + 3| \geq 8 \\ &\Leftrightarrow -x \cdot -(x + 3) + x \cdot -(x + 3) \geq 8 \\ &\Leftrightarrow x(x + 3) - x(x + 3) \geq 8 \\ &\Leftrightarrow 0 \geq 8 \end{aligned}$$

Lo cual es totalmente falso. Por lo tanto este intervalo no nos sirve como solución.

- $(-3, 0)$:

$$\begin{aligned} |x(x + 3)| + x|x + 3| \geq 8 &\Leftrightarrow x(x + 3) + x(x + 3) \geq 8 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 1)(x + 4) \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando como análisis la tabla, se obtiene que tampoco nos sirve este intervalo.

- $(0, +\infty)$:

Análogo a lo anterior, nuestro estudio se reduce a la misma tabla, de la cual se puede deducir que el intervalo que nos sirve es $(1, +\infty)$. Ahora revisando el caso extremo $x = 1$, nos damos cuenta que nos sirve, por lo tanto incluimos dicho punto.

Finalmente nuestro análisis nos llevó a que el intervalo que se tiene como solución es $[1, +\infty)$.

- (d) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación:

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1.$$

Solución

Los puntos críticos son: $x = 1$ y $x = 2$. Esto nos genera 3 intervalos: $(-\infty, 1)$, $(1, 2)$ y $(2, +\infty)$.

- $(-\infty, 1)$: La inecuación en este caso nos queda de la siguiente forma, teniendo en cuenta que el numerador es positivo en cualquier caso:

$$\begin{aligned} \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x - 2)} \leq 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq x^2 - 3x + 2 \\ &\Leftrightarrow x \leq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto este intervalo nos sirve por completo, ahora si analizamos el punto $x = 1$ nos damos cuenta que a ambos lados de nuestra desigualdad nos queda 0, por lo tanto lo incluimos. El intervalo $(-\infty, 1]$ es solución.

- $(1, 2)$: Nuestra inecuación nos queda de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{(x - 1)^2}{-(x - 1)(x - 2)} \leq 1 &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \leq -x^2 + 3x - 2 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 3 \leq 0 \end{aligned}$$

Es una cuadrática que tiene como solución real a $x = 1$ y $x = 3/2$. Por lo que el análisis se reduce a averiguar que pasa con: $(2x - 3)(x - 1) \leq 0$, pero usando la tabla mágica nos damos cuenta que el intervalo que es útil es $(-\infty, 3/2]$.

- $(2, +\infty)$: Este intervalo nos genera la misma solución que el primer punto, por lo tanto es descartable.

Finalmente luego de unir todo, el intervalo que se tiene como solución es $(-\infty, 3/2]$, pero debemos hacer una salvedad, en el punto $x = 1$ se tiene lo que se conoce como discontinuidad, ya que si evaluamos en nuestra inecuación original tendríamos 0 arriba y 0 abajo por ende llegamos a algo totalmente raro, esto se traduce en que nuestro intervalo final de solución es $(-\infty, 3/2] \setminus \{1\}$, es decir, sin el 1.

- (e) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 - 2x| + x|x + 3| \geq 3$$

Solución De esta inecuación obtenemos 3 puntos críticos, $x = 0$, $x = 2$ y $x = -3$, por ende tenemos 4 intervalos: $(-\infty, -3)$, $(-3, 0)$, $(0, 2)$ y $(2, +\infty)$.

- $(-\infty, -3)$: De esto obtenemos la siguiente inecuación:

$$\begin{aligned} |x(x-2)| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow x(x-2) - x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow -5x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \leq \frac{-3}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto el intervalo completo que estamos analizando, nos sirve, incluido su punto crítico, $(-\infty, -3]$.

- $(-3, 0)$:

$$\begin{aligned} |x(x-2)| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \geq 0 \end{aligned}$$

De esta cuadrática obtenemos 2 soluciones, $x = \frac{-3}{2}$ y $x = 1$. Por lo tanto usando la tabla mágica y considerando el intervalo que estamos analizando, nuestra solución se reduce a $(-3, -3/2]$

- $(0, 2)$:

$$\begin{aligned} |x(x-2)| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow -x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto teniendo en cuenta el intervalo mayor que estamos analizando, la solución a nuestra inecuación en este caso sería $[3/5, 2)$

- $(2, +\infty)$: En este caso obtenemos lo mismo que en el segundo punto, del cual obtenemos como solución el intervalo $(1, +\infty)$, pero como este contiene al que estamos analizando, nuestro resultado en este caso es $[2, +\infty)$.

Uniendo todas nuestras soluciones, obtenemos como resultado lo siguiente: $(-\infty, -3/2] \cup [3/5, +\infty)$.