Profesor: Guillermo Durán

Auxiliares: André Carboni, Pamela Espinosa

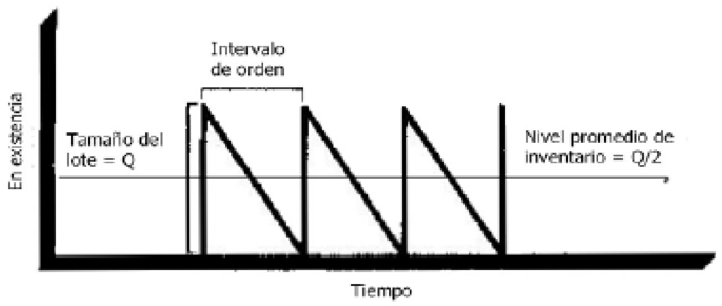
IN47A – Gestión de Operaciones
Auxiliar 5
23 de Junio, 2010

Modelos de Inventario:

Q: Tamaño de la orden
S: Costo fijo por orden
D: Demanda anual
C: Costo del producto
T: Largo del ciclo
I: tasa anual de costo de inventario (interés+almacenamiento)

1. Demanda Determinística:

- Sin ventas pendientes



Costo por período:

$$F = S + \frac{1}{2} ICQT$$

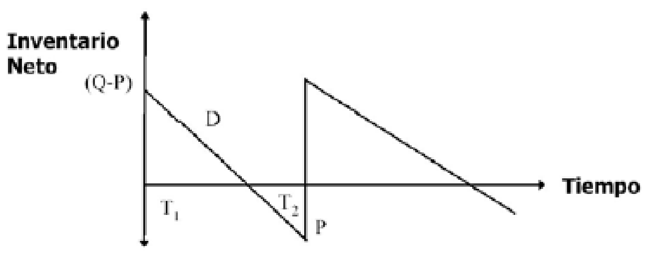
Costo anual:

$$TC = F\frac{1}{T} = F\frac{D}{Q} = S\frac{D}{Q} + \frac{1}{2} ICQ$$

Q* óptimo:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{IC}}$$

- Con ventas pendientes:



P: Ventas pendientes

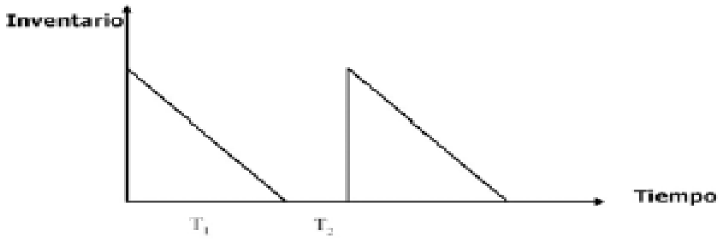
π: Costo por venta pendiente

π^: Costo por venta pendiente por tiempo en satisfacerlas

Costo por período:

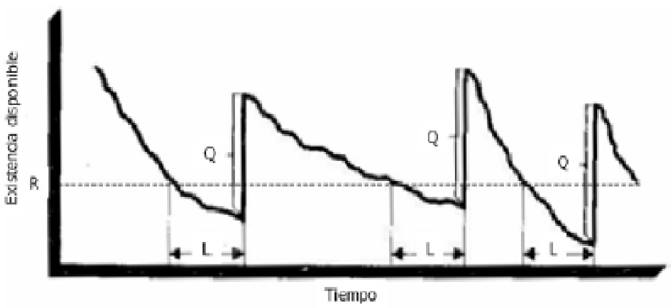
$$F = S + \frac{1}{2} ICQT_1(Q-P) + \pi P + \frac{1}{2}\hat{\pi}T_2 P$$

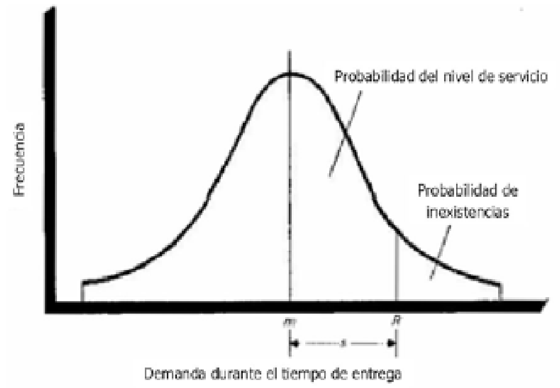
- Con ventas perdidas:



2. Demanda Aleatoria

• Sistema de Revisión Continua (Q):





Q: Tamaño de la orden (se usa Q*)

R: punto de reorden

L: tiempo de entrega

Nivel de Servicio: probabilidad de servir todas las demandas

m: Demanda media

s: Inventario de seguridad

$$CT = \frac{SD}{Q^*} + iC\overline{Q} \qquad \text{donde } \overline{Q} = \frac{Q^*}{2} + s$$

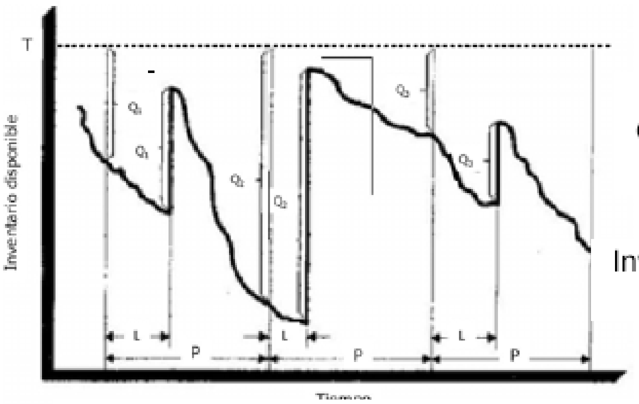
Punto de reorden:

R = m + s = m + zσ

z: factor de seguridad

σ: desviación estándar en tiempo de orden

- **Sistema de Revisión Periódica (P):**



$$CT = \frac{SD}{Q^*} + iC\overline{Q} \quad \text{donde} \quad \bar{Q} = \frac{m(p+L)}{2} + s^*$$

Inventario objetivo: T = m' + s' = m' + zσ' (para P+L)

P: tiempo entre pedidos

T: inventario meta u objetivo, debe cubrir hasta que llegue el siguiente pedido

m': demanda promedio en P+L

s´: inventario de seguridad en P+L

Pregunta 1

Considere una empresa que debe manejar el inventario de un solo producto. En una primera instancia va a considerar una demanda determinística para calcular sus pedidos. Se sabe que la demanda anual D es de 10.000 unidades, el costo por pedido S es de $2.000, el costo unitario del producto C es de $200 y el costo anual por unidad en bodega I es del 20 %.

1. Calcule el tamaño de la orden y la frecuencia de pedidos al año.

Datos:

D= 10000 unidades (demanda anual)

S= $2000 (costo fijo por orden)

C= $200 (costo unitario del producto)

I= 0.2 (costo anual inventario)

Usando la fórmula, tenemos que el tamaño de la orden es:

$$Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{IC}} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2*200*1000}{0.2*200}} = 1000$$

la frecuencia es: $n = \frac{D}{Q^*} = \frac{10000}{1000} = 10$ (pedidos/ año)

2. Se da cuenta que se equivocó en el costo anual I, costo anual por unidad en bodega, el cual resulta ser del 30% en vez del 20%. Considerando que Q* lo calculó en la parte anterior con I = 0, 2, ¿cómo calcula el mayor costo de inventario debido a ese error?.

La cantidad óptima ya fue calculada, pero existe un error en el costo anual por unidad en bodega. Por este error existe un aumento en el costo de inventario y se calcula como:

1° Cálculo del costo total con el costo real de inventario

2° Cálculo del costo ideal, si se hubiese estimado bien la cantidad óptima

1° $CT_1 = S \cdot n + \frac{1}{2} \cdot ICQ^* = 2000 * 10 + 1/2 * 0.3 * 200 * 1000 = 50000$

2° Debemos calcular el nuevo Q^* :

$Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{IC}} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2 * 200 * 1000}{0.3 * 200}} = 816.497 \approx 817$ y el costo sería:

$$CT_2 = S \cdot \frac{D}{Q^*} + \frac{1}{2} \cdot ICQ^* = 2000 * \frac{10000}{817} + 1/2 * 0.3 * 200 * 817 = 48989.8$$

Por lo que se están perdiendo $1010.2, por ese error

3. Para este mismo problema, resulta que se da cuenta de que la demanda es aleatoria y que usted tiene datos de las demandas por semana de todo un año. La función de probabilidades de demanda se asemeja a una normal y la empresa se maneja con revisión continua. ¿Cómo define el punto de reorden y el stock de seguridad si el tiempo de entrega es 2 semanas y desea una calidad de servicio del 95 %? Sólo indique cómo lo hace, no haga cálculos.

R = m + s, donde s = z* σ

- m = 2 * (demanda promedio semanal)
- Para un 95% se tiene que z=1,96
- Como los datos de demanda son semanales se tendría ó semanal, por lo que como el tiempo de entrega son 2 semanas se tiene que (2 semanas) = $\sqrt{2} \cdot \sigma(semanal)$

Pregunta 2

Considere un almacén regional que compra herramientas normales a varios proveedores, y los distribuye a vendedores al detalle en la región. El almacén trabaja 5 días a la semana y 52 semanas al año. Tome en cuenta los siguientes datos para serruchos:

- Demanda diaria = 100 [serruchos].
- Desviación estándar de la demanda diaria = 30 [serruchos].
- Tiempo de entrega = 3 [días].
- Costo de manejo de inventario = $9,40[unidad/año].
- Costo de hacer el pedido = $ 35 por pedido

El almacén trabaja con nivel de servicio de 92% (lo que equivale a Z = 1,40).

1. **Calcule el costo anual del inventario para un sistema de revisión continua.**

El costo total de inventario se calcula como:

$CT = S \cdot n + iC\bar{Q}$ (costo pedido + costo inventario)

Luego, es necesario conocer el valor n (cantidad de pedidos y de $\bar{Q}$ el nivel promedio de inventario, para ello se tiene que en un sistema de revisión continua:

$$n = \frac{D}{Q^*}$$

$\bar{Q} = \frac{Q^*}{2} + s$, donde D es la demanda anual promedio, Q^* corresponde al Q de Wilson y s es el stock de seguridad de un sistema de revisión continua. Entonces:

$Q^* = \sqrt{\frac{2SD}{IC}} \Rightarrow Q^* = \sqrt{\frac{2*35*52*100}{9.4}} = 440.02 = 441$ (serruchos)

$n = \frac{52*5*100}{441} = 58.95 \approx 59$ (veces al año)

$\sigma(3dias) = \sqrt{3} \cdot \sigma(diario) = \sqrt{3} \cdot 30 = 51.96 \approx 52$ (serruchos)

$s = z \cdot (3dias) = 1.4*52 = 72.8 \approx 73$ (serruchos)

=> $\bar{Q} = \frac{441}{2} + 73 = 293.5 \approx 294$ (serruchos)

Finalmente el costo anual será:

$CT = S \cdot n + iC\bar{Q} = 35 \cdot 59 + 9.4 \cdot 294 = 4817.69$ (pesos)

2. **Calcule el costo anual de inventario para un sistema de revisión periódica.**

Para este caso, nuevamente el costo anual de inventario viene dado por:

$$CT = S \cdot n + iC\bar{Q}$$

pero es necesario calcular el valor del tiempo de revisión (periódico), para ello:
p = días en el año/ veces que se pide

$p = \frac{5*52}{59} = 4.4 \approx$ 4 o 5 días (Se debe aproximar dependiendo de las políticas de la empresa)

En este caso tomaremos 5 (también pueden tomar 4, pues no hay información de las políticas de la empresa). Además necesitamos tener el valor de $\bar{Q}$, para ello se tiene que en un sistema de revisión periódica:

$\bar{Q} = \frac{m(p+L)}{2} + s^*$, donde m(p+L) es la demanda promedio a satisfacer durante el tiempo de revisión más el tiempo que demora en llegar el pedido, y s^* es el inventario de seguridad para un sistema de revisión periódico, entonces:

$m(p+L) = m(5+3) = m(8dias) = 8*100 = 800$ (serruchos)

$\sigma(p+L) = \sqrt{8} \cdot \sigma(diario) = \sqrt{8} \cdot 30 = 84.85 \approx 85$ (serruchos)

$s^* = z \cdot \sigma(p+L) = 1.4*85 = 119$ (serruchos)

=> $\bar{Q} = \frac{800}{2} + 85 = 519$ (serruchos), con lo que tenemos $CT = 35*52 + 9.4*519 = 6698.6$ (pesos)

NOTA: Aquí la pregunta que me hicieron en clases y que respondí parcialmente (:P) era: ¿Cuál Q* usamos en la fórmula del costo total para un sistema de inventario de revisión periódica? En la pizarra cambié el D/Q* por el n, número de veces que se pide una orden, y aquí justamente usaron ese n. Noten que n=días del año/p = 52*5/5 = 52.

3. **Suponga que el almacén implementó el sistema de revisión continua. Ahora puede contratar un sistema de despacho expreso, el cual demoraría 2 días en lugar de los 3 días actuales en entregar los pedidos, pero tendría un recargo. Calcule el máximo recargo por cada viaje, de modo que el nuevo servicio expreso sea conveniente para el almacén. Haga y explicite los supuestos que estime necesarios y razonables. Justifique.**

El costo de inventario cambiará dado que el valor de L disminuye de 3 a 2 días. Entonces cambiarán los siguientes valores calculados en 1:

Ya que : $\sigma(2dias) = \sqrt{2} \cdot \sigma(diario) = \sqrt{2} \cdot 30 = 42.42 \approx 43$ tenemos:

- $s = z \cdot (2dias) = 1.4 * 43 = 60.2 \approx 61$ (serruchos)

- $\bar{Q} = \frac{Q^*}{2} + s = \frac{441}{2} + 61 = 282$, luego el costo anual será:

$CT = 35 * 59 + 9.4 * 292 = 4715.8$ (pesos)

Entonces, el ahorro anual que se obtiene es:

CT(L=3 dias)- CT(L=2 dias)=4817.69-4715.8=101.89 (pesos), luego el máximo recargo que se puede hacer por viaje realizado en el año es:

Recargo máximo = ahorro anual/ n° de viajes año $= \frac{101.89}{59} = 1.72$

Finalmente, el almacén está dispuesto a pagar a lo más 1.72 pesos extras o de recargo por cada pedido que se realiza teniendo en cuanta que se demorará 1 día menos en llegar.

Pregunta 3

Considere los sistemas de inventarios de revisión continua y revisión periódica:

1. **¿Cuál de ellos tiene mayor nivel de inventario medio? Justifique.**

El inventario medio se define como la suma del inventario promedio más el inventario de seguridad. Un sistema de revisión periódico debe tener un inventario de seguridad capaz de cubrir un periodo de tiempo P+L, donde P es el periodo de revisión del inventario y L es el tiempo de entrega del proveedor. En cambio un sistema de revisión continua solo debe tener un inventario se seguridad capaz de cubrir un periodo del largo del tiempo de entrega L.

2. **Si el tiempo de despacho disminuye a la mitad, ¿en cual de los dos sistemas el inventario disminuye más? Justifique.**

El tiempo de despacho corresponde al tiempo de entrega del proveedor, por lo que si se disminuye a la mitad tendrá un mayor efecto en un sistema de revisión continua, ya que es el único factor a considerar al momento de estimar el nivel de inventario. En cambio para la misma disminución en el tiempo de entrega en el sistema de revisión periódica el efecto es menor, dado que L es solo una fracción del tiempo total a considerar (L+P).

Pregunta 4

Considere el problema de adquisición e inventario para un artículo, donde la demanda anual es D, el costo fijo por orden es S y la tasa anual de mantención de inventarios es i. Además suponga que el costo de adquisición del artículo depende del tamaño del lote de compra. De esta manera, si el tamaño de lote es Q el costo total de adquisición de las Q unidades es f(Q), la función f es diferenciable.

1. Escriba la ecuación del costo total del ciclo y la del costo total anual, si el tamaño del lote es Q
2. Escriba la condición necesaria de equilibrio para el tamaño de lote óptimo Q*. Puede también expresarlo en T*, la duración óptima del ciclo.
3. Demuestre si el costo medio de adquisición del lote óptimo, dividido por el costo marginal de adquisición del lote óptimo es igual a $\frac{T_i^*}{2} o \frac{Q_i^*}{2D}$, entonces el costo medio de adquisición del lote, en el óptimo, es igual a $\frac{1}{2}\cdot\frac{S_i}{D}$. Muestre que la función $f(Q) = e^{\frac{-2D}{iQ}}$ cumple con la condición expresada en la hipótesis del párrafo anterior.

1. Costo total del ciclo:

$$F = CF + CV$$

$$F = S + \frac{1}{2} if(Q) * T + f(Q)$$

Costo total anual: $CT = \frac{F}{T} = \frac{S}{T} + \frac{1}{2} if(Q) + \frac{f(Q)}{T}$

2.

$$F(Q) = \frac{SD}{Q} + \frac{1}{2} if(Q) + \frac{f(Q)\cdot D}{Q}$$

$$\frac{dF(Q)}{dQ} = 0 \Rightarrow -\frac{SD}{Q*^2} + \frac{1}{2} if'(Q) + \frac{QDf'(Q) - Df(Q^*)}{Q*^2} = 0$$

$$\Rightarrow QDf'(Q^*) + \frac{1}{2} iQ*^2\ f'(Q^*) = SD + Df(Q^*)$$

3.

Costo medio en el óptimo = $\dfrac{f(Q^*)}{Q^*}$

Costo marginal en el óptimo = $f'(Q^*)$

$$\left(\frac{\dfrac{f(Q^*)}{Q^*}}{f'(Q^*)}\right) = \frac{T \cdot i}{2} = \frac{Q \cdot i}{2D} \Rightarrow f'(Q^*) = \frac{2f(Q^*)D}{iQ^{*2}}$$

Reemplazando en la ecuación obtenida en la pregunta 2:

$$\frac{2D^2 \cdot Q \cdot f(Q^*)}{i \cdot Q^{*2}} + \frac{1}{2} iQ^{*2} \frac{2f(Q^*)D}{iQ^{*2}} = SD + Df(Q^*)$$

$$\Rightarrow \frac{2D^2 f(Q^*)}{iQ^*} = SD$$

$$\Rightarrow \frac{f(Q^*)}{Q^*} = \frac{Si}{2D}$$

(costo medio óptimo)

3.

Hipótesis: $\left(\dfrac{\dfrac{f(Q^*)}{Q^*}}{f'(Q^*)}\right) = \dfrac{T \cdot i}{2} = \dfrac{Q \cdot i}{2D}$

$$f(Q) = e^{\frac{-2D}{iQ}} \Rightarrow f'(Q) = \frac{2D}{iQ^2} e^{\frac{-2D}{iQ}} = \frac{2D}{iQ^2} f(Q)$$

$$\Rightarrow \frac{f(Q)}{f'(Q)} = \frac{iQ^2}{2D} \Rightarrow \left(\frac{\dfrac{f(Q^*)}{Q^*}}{f'(Q^*)}\right) = \frac{Q \cdot i}{2D} = \frac{T \cdot i}{2}$$