UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA INDUSTRIAL

ANÁLISIS COSTO BENEFICIO DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE BLACK-LITTERMAN PARA ASIGNACIÓN DE ACTIVOS EN PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

ROCÍO MAGDALENA GÁLVEZ PINTO

PROFESOR GUÍA:
JOSÉ MIGUEL CRUZ GONZÁLEZ

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
WILLIAM BAEZA LÓPEZ
FRANCISCO ERRANDONEA TERÁN

SANTIAGO DE CHILE
SEPTIEMBRE 2008

RESUMEN DE LA MEMORIA
PARA OPTAR AL TITULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL.
POR : ROCÍO GÁLVEZ PINTO.
FECHA:
PROF. GUIA: JOSE MIGUEL CRUZ.

ANÁLISIS COSTO BENEFICIO DE LA IMPLEMENTACIÓN DEL MODELO DE BLACK-LITTERMAN EN PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN

En esta memoria de título se presentan los resultados de la comparación de dos modelos de asignación de activos en portafolios de inversión. El primero de ellos corresponde a la forma tradicional de estructurar portafolios, el modelo de Markowitz, que es contrastado con el modelo de Black-Litterman, que propone la inclusión de visiones del inversionista al momento de estimar los retornos esperados para los activos involucrados.

Este trabajo responde a la necesidad de asignar activos en portafolios, consiguiendo máxima rentabilidad para el nivel de riesgo escogido. El Modelo de Markowitz presenta inconvenientes como portafolios altamente concentrados, que no recogen el punto de vista del inversionista y poca objetividad al momento de estimar rendimientos para los activos involucrados. Cómo solución se propone el modelo de Black-Litterman, que desplaza la frontera eficiente al realizar una nueva optimización riesgo-retorno, consiguiendo carteras menos riesgosas y coherentes con la intuición previa del inversionista.

Se propone como objetivo general de este trabajo: Analizar el costo y beneficio de la implementación del modelo de Black-Litterman en portafolios de inversión. Para esto se presentan objetivos específicos que apuntan a comparar carteras eficientes de inversión, determinando el costo de implementar dichos modelos, determinar el nivel de confianza de algunos emisores de recomendaciones bursátiles y analizar la aplicabilidad de estos modelos en casos reales.

La comparación entre modelos se realiza de modo ínter temporal, es decir se obtienen fronteras eficientes de inversión en determinados momentos de tiempo. Dichas fronteras se comparan, observando cual entrega mejores oportunidades de inversión. De cada frontera se extrae el portafolio de mínima varianza, riesgo 4 y 5%. Con eso se verifica su rentabilidad real versus su rentabilidad esperada, tanto parcialmente como en la serie acumulada de todo el periodo en estudio. En lo que se refiere a las fronteras eficientes a comparar, se recolectan datos sobre los precios de cierre semanales de las acciones de las 19 empresas que compusieron el índice nacional IPSA durante el 2007, con 100% de presencia bursátil. Con ellos se calcula niveles de riesgo (betas) para obtener tasas de retorno esperado sobre el patrimonio (CAPM), covarianzas entre empresas, y otros procedimientos que permiten utilizar procedimientos de optimización.

Como resultados principales se encontró que el rendimiento acumulado del periodo es mayor en el modelo de Black-Litterman, para todos los niveles de riesgo estudiados. A su vez, las tendencias de los retornos son crecientes, pero las pendientes aumentan con el riesgo en el caso de B-L, mientras que disminuyen con Markowitz. Por tanto, en la medida que más sea el inversionista amante al riesgo, más conveniente resulta la implementación del modelo de Black-Litterman. Para el caso de los portafolios de mínimo riesgo, los resultados son similares por lo que pareciera no justificarse el costo de la implementación de un modelo de cómo éste.

A Daniela, mi sobrina, que sin pretenderlo me mostró que vale la pena vivir la vida.

Agradecimientos

En primer lugar quisiera agradecer a quién me guió en la elaboración de este trabajo, mi profesor J. Miguel Cruz, quién me orientó en qué y cómo plasmar en un escrito lo que he aprendido en todos estos años. Gracias, profe.

A lo largo de mi vida universitaria he conocido mucha gente que ha aportado en lo que hoy estoy consiguiendo, por eso quisiera nombrar a quienes me acompañan hasta hoy y creo que seguirán conmigo el resto de mi vida. Agradezco tantas noches de estudio a Edgar y Nicolás, la paciencia de Waldo cuando me enseñaba electricidad, las tareas con Andrés, los esfuerzos de Marcela por que entendiera química, la gran paciencia de Humberto y J. Carlos en mis malos ratos. También doy gracias a Carla e Ignacio, por la grata compañía de tantos años. Además, agradezco a Mario, que aportó a la realización de este trabajo con mucha información que me fue útil y que no pude extraer por mi misma.

También quiero mencionar en esta sección a Daniela, Thiare y Lucía, que me ayudaron a recuperar la fe en mí, cuando estuve a punto de perderla, que me acompañaron cuando me sentí sola y permanecieron conmigo. Gracias chicas.

Por otro lado quiero mencionar a Evelyn y a Miguel, que me ayudaron en la elaboración de este trabajo, y me acompañaron en este largo trayecto.

En distintos periodos de mi vida me acompañaron Roberto y Felipe, ellos compartieron conmigo largas tardes de estudio y muchas discusiones. Gracias por acompañarme en cada período.

Agradezco también, a mis hermanos Cristián y Marcel, quienes me apoyaron, ayudaron y remecieron cuando fue necesario. Me enseñaron a estudiar y a que la vida no es estudio ni trabajo, sino que sirven para vivir mejor.

Por último, quisiera agradecer a quienes han hecho que yo sea quién y cómo soy, mis padres. Fueron el principio de mi vida, mi motivación, mi constancia y mi razón. Cuando flaqueé estuvieron ahí y cuando me sobrecargué, me aliviaron la carga. Siempre he dicho que uno es cómo se le ha criado, así que gracias padres por convertirme en lo que hoy soy.

Índice

1 Introducción.

El presente trabajo de título intenta dar solución a las clásicas interrogantes de rentabilidad, riesgo e información. Específicamente se comprueba el beneficio de implementar un modelo de inversiones en activos financieros que maximiza la rentabilidad del portafolio, minimizando el riesgo, considerando la información y especulaciones existentes en el ambiente financiero.

Uno de los modelos más utilizados para asignar activos en los portafolios de inversión busca minimizar el riesgo asociado a cada cartera formada, tomando como elemento principal los precios históricos de los activos considerados. Este modelo, desarrollado por H. Markowitz en 1952, presenta algunos inconvenientes, tales como portafolios altamente concentrados[1], poco intuitivos y considera los puntos de vista de los inversionistas. Cómo solución a estos problemas se presenta el modelo de Black-Litterman, para asignación de activos en portafolios de inversión, que desplaza la frontera eficiente como resultado de una nueva optimización riesgo-retorno.

Dado lo anterior, el objeto de esta memoria se concentra sistematizar las diferencias entre los resultados entregados por los modelos de Black-Litterman y Markowitz, las ventajas y desventajas que presenta cada uno y cómo ejecutar su implementación.

El aporte fundamental de este trabajo a la literatura e investigación respecto al modelo de Black-Litterman, es la materialización de los conceptos en una economía real, como la chilena, sensibilizando el análisis a través de un caso práctico. Es posible encontrar en la literatura múltiples investigaciones sobre las diferencias entre los modelos previamente mencionados, pero siempre el análisis es desde el punto de vista de la optimización en que se basan, y en la matemática que se utiliza para llegar a ambos enunciados, sin corroborar ni mostrar dichos resultados en carteras reales. Resumiendo entonces, es parte fundamental del objetivo, mostrar cuales serían las diferencias presentadas por ambos modelos, en un caso real chileno.

Se propone como objetivo general de este trabajo:
Analizar el costo beneficio de la implementación del modelo de Black-Litterman en portafolios de inversión.

El análisis y desarrollo del objetivo planteado, se estructura mediante los siguientes objetivos específicos:
- Comparar carteras eficientes de inversión, según el modelo de Markowitz y el modelo de Black-Litterman.
- Determinar el nivel de confianza de las especulaciones de cada agente involucrado.
- Encontrar cómo transcribir matemáticamente las recomendaciones bursátiles.
- Analizar el nivel de aplicabilidad de los modelos en casos reales.
- Determinar si es posible construir ambos modelos con información pública.

Dado que el objetivo principal es analizar el costo beneficio de la implementación del modelo ya mencionado, este trabajo se limitará a construcciones de carteras a partir de un abanico de activos en particular, que considera instrumentos bursátiles nacionales. En consecuencia, los portafolios generados sólo son válidos para el medio local y para las empresas consideradas en el IPSA durante el año 2007, que mantienen 100% de presencia bursátil. Por otro lado, los datos

[1] Fuente: "Black-Litterman Asset Allocation Model", Jiang, Panda, Lin y Zhang.

históricos requeridos para la verificación de la eficiencia del modelo, fueron generados semanalmente entre los años 2000 y 2007.

Paralelamente, si se presenciara problemas de disponibilidad de la información pública, se especificará qué tipo de datos faltan, de donde y cómo se obtuvieron. En este caso, es necesario especificar que no es posible implementar estos modelos por problemas de asimetrías de información. Se considera además, la vía privada de adquisición de información, para la eventualidad mencionada.

Para una mejor comprensión de la información, este trabajo ha sido organizado por capítulos, que gradualmente introducen los modelos de Markowitz y Black-Litterman, luego muestran las metodologías respectivas, para llegar finalmente a los resultados obtenidos en ambos casos. Por último, se entregan las conclusiones de este estudio y las recomendaciones pertinentes.

2 Marco Teórico.

2.1 Introducción Teórica Al Modelo De Markowitz Sobre Asignación De Activos En Carteras De Inversión.

En 1952, Harry Markowitz presentó su publicación *Portfolio Selection*, con ella culmina un ciclo de desarrollo de la teoría sobre asignación de activos en portafolio, sistematizándose finalmente en esta publicación y fijando un hito fundamental en este campo.

Conceptualmente en ella se logró vincular los activos de una cartera de inversión con la optimización (máximos) de los rendimientos, dado un nivel de riesgo asumido. Se concluye de esta forma la frontera de eficiencia de inversión, y los valores que la conforman, vinculados estos a cada plano riesgo – retorno.

Es evidente que la relación del inversionista con este concepto pasa por la conjunción de su perfil de riesgo (disposición a asumir un mayor o menor riesgo) y la globalización de las incertezas que proyectan la totalidad de las inversiones. Markowitz da un paso más allá en este concepto y postula que no basta con mirar los activos individual y estáticamente, sino que debe asumirse como una relación dinámica que evoluciona permanentemente en el tiempo, de acuerdo a las interacciones que se generan al interior de la cartera. De esta forma surge como concepto fundamental la covarianza de ellos, siendo ésta un elemento significativo al momento de mejorar la calidad de predicción del modelo.

Así, ya no es suficiente los parámetros iniciales, varianzas históricas, sino que ahora deben considerarse como indicadores relevantes las covarianzas entre activos. A partir de esto, es posible generar la varianza de cada portafolio que se escoja, siendo el resultado del modelo la cartera de menor varianza para cada nivel de retorno deseado. Si se considera la desviación estándar de un portafolio como el riesgo asociado al mismo, lo que se obtiene es la combinación de activos que minimiza el riesgo para un cierto retorno esperado.

El modelo postulado por Markowitz se presenta a continuación:

$$\text{Min } \sigma^2(r_p) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij}$$

Sujeto a:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E(R_i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

Donde x_i es la proporción del portafolio asignado al activo financiero *i*, σ_{ij} corresponde a la covarianza entre los retornos de los valores *i* y *j*, σ^2 (r_p) es la varianza de los retornos de la cartera completa. Por último, E (r_p) es la rentabilidad esperada del portafolio.

Los resultados que entrega esta optimización son las proporciones del presupuesto a invertir, destinadas a cada activo. Esto es, la asignación completa de los recursos a invertir en el universo de instrumentos posibles.

Es fácil ver que se busca reducir la varianza total del conjunto de inversiones, como un todo, considerando las interacciones entre cada par de activos. Esto, considerando que la rentabilidad del conjunto es la combinación lineal de las rentabilidades de cada instrumento y, por supuesto, que la cartera es el 100% de la inversión.

Analizando los casos extremos del modelo se observa que, si el portafolio es conformado por todos los activos del mercado, el riesgo se diversificará siendo exactamente el riesgo de mercado; por el contrario, si se compone de sólo un activo, el riesgo se concentrará en la inseguridad de dicho instrumento.

Una versión análoga de este teorema, pero adaptada a matemáticas matriciales se presenta a continuación:

$$\text{Min } \sigma^2(r_p) = w^T \cdot \Sigma \cdot w$$

Sujeto a:

$$E(r_p) = w^T \cdot R$$

$$\vec{1} \cdot w = 1$$

$$w_i \geq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,n.$$

Donde w corresponde al vector eficiente de asignaciones de Markowitz, Σ es la matriz de covarianzas entre los activos, R es el vector de los retornos esperados y 1 es un vector unitario.

El enfoque de varianza media de Markowitz generó una revolución en la formación de carteras, por tanto es el más utilizado en esta área hasta el día de hoy.

2.1.1 Supuestos de la Teoría de Markowitz.

Como punto de partida, la teoría considera como supuestos:

- Los agentes inversores son racionales, es decir minimizan el riesgo para cualquier rentabilidad esperada.
- La selección de activos a optimizar sólo es válida para un período, cualquiera sea éste.
- En el universo de capitales existen n activos que pueden combinarse para formar un portafolio.
- Los activos son perfectamente divisibles.
- Se ignora todo costo de transacción, como comisiones u otros.
- Se considera que no existen asimetrías de información, ni poder de mercado.
- Se supone conocida o calculable la esperanza de la rentabilidad, la varianza y la covarianza de los activos del mercado.
- Los rendimientos de los instrumentos financieros se comportan según una distribución Normal de probabilidades.

En general, se pueden considerar estos supuestos como respetados ya que, usualmente, los mercados son suficientemente grandes como para ignorar las posibles asimetrías de información; la unidad a adquirir es pequeña en relación al capital disponible, como los son las acciones; y los datos históricos sobre rentabilidades permiten establecer varianzas, covarianzas y rentabilidades esperadas.

2.2 Introducción Teórica Al Modelo De Black-Litterman Para La Asignación De Activos.

Aunque el modelo de Markowitz revolucionó el modo de estructurar los portafolios de inversión, los problemas asociados son motivo de la búsqueda de una teoría más estable. Así fue como Fisher Black y Robert Litterman se vieron incentivados, en 1992, a crear un modelo que corrige las dificultades antes mencionadas al asignar activos en carteras de inversión.

Black y Litterman tuvieron la idea de combinar el estado de equilibrio de la economía, con información que provoca ligeras desviaciones, ya sea en la oferta o la demanda por activos, antes de ser incorporadas en el mercado. Esta información es conocida como visiones de mercado o especulación. Producto de esta combinación se genera un modelo de retornos esperados que obtiene una maximización de utilidades más acertada que los métodos conocidos.

En una introducción al modelo propuesto, ha de entenderse en primer lugar, el punto de inicio, que corresponde a la idea de equilibrio. Litterman[2] supone que el mercado está permanentemente en un estado de equilibrio puntual, en que la oferta por activos es equiparada con la demanda por los mismos. El equilibrio instantáneo puede ser comprendido como el "centro de gravedad", del cual los mercados se desvían en todo instante, según la información que surja, pero el sistema y la información en él presionarán los precios permitiendo que el mercado vuelva a equilibrarse. La idea de equilibrio es básica para el modelo, y se entiende como un estado ideal. No obstante, es posible llegar a una aproximación razonable de éste, del que se puedan sacar ventajas.

---

2 Litterman, R. "*Modern Investment Management – An Equilibrium Approach*", 2003.

Litterman indica que el motivo para considerar el equilibrio como punto de partida tiene relación con la creencia de que es un punto de referencia favorable y apropiado para identificar las desviaciones de las cuales se puede sacar ventaja. Si se asume que los mercados se mueven hacia el equilibrio racional, los inversores tratarán de tomar ventajas según las teorías de portafolio. Litterman (2003) postula que la teoría de portafolios indica a los inversores cómo los mercados reaccionarán ante ciertos eventos y por tanto cómo asignar sus activos en los portafolios.

En referencia a los mercados en equilibrio, un buen punto de partida para estimar los retornos esperados, es el *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), que considera los activos globalmente para determinar rendimientos individuales en el futuro. Si además se considera la capitalización del mercado, es posible obtener equilibrios transitorios, apropiados para combinarse con las desviaciones esperadas que tenga el mercado y así apostar por aquellos activos que generarían mejores rendimientos, considerando el riesgo asociado.

Entonces, el equilibrio de mercado queda representado por:

- Retornos esperados de equilibrio:

$$\Pi = \delta \cdot \Sigma \cdot w_{Mkt}$$

  Es decir, el producto entre la tolerancia media al riesgo (δ), este valor se estima en 2,5 para la media mundial, las covarianzas entre los activos (Σ) y la capitalización de los activos en el mercado (w_{Mkt}).

- Retornos esperados mediante la distribución de CAPM:

$$\mu = \Pi + \varepsilon^{(e)}$$

  Donde los retornos esperados están representados por μ, un vector que sigue una distribución normal de media $\bar{\mu}$, y se componen de los retornos de equilibrio de mercado (Π) más un cierto error ($\varepsilon^{(e)}$) que sigue una distribución normal de media cero y varianza $\tau\Sigma$. El parámetro τ corresponde a un escalar que mide la incerteza sobre los retornos de mercado.

El aporte de Black y Litterman consiste en mostrar que el equilibrio de mercado puede ser combinado con las visiones que los inversionistas tienen sobre el mercado, debido a que será posible adelantarse a las desviaciones que surgirán del equilibrio y podrá tomarse posiciones ventajosas antes que el mercado vuelva a acomodarse de forma natural, como ha postulado Litterman. Entonces, es necesario entender qué son las visiones de mercado y como se comportan.

Visiones son comportamientos específicos que, a juicio de los inversionistas, tendrían algunos activos del portafolio y que serían distintos al comportamiento general del mercado. Éstas pueden expresarse de tres formas distintas, en términos absolutos o relativos, he aquí un ejemplo genérico para cada forma:

- Visión Absoluta: El activo A presentará un retorno absoluto de R%, con un nivel de confianza de C%.
- Visión Relativa Simple: El activo A superará al activo C en R%, con un nivel de confianza de C%.
- Visión Relativa Múltiple: Los activos A y B superarán a los activos C y D en R%, con un nivel de confianza de C%.

En cada asignación de activos, el nivel de confianza de cada visión es determinado por el administrador del portafolio. El enfoque tradicional de varianza media de Markowitz, en cambio, no permite la introducción de estas visiones de mercado y menos aún el nivel de confianza de ellas.

Respecto al nivel de confianza de cada visión, es posible encontrar varios puntos de vista en la literatura, siendo el enfoque de la desviación estándar el más recurrente. Al fijar el precio objetivo de un activo en particular, éste presentará una amplia desviación estándar si el emisor de la recomendación no posee gran certeza sobre el futuro del activo, por el contrario, la desviación estándar del precio objetivo será pequeña si posee convicción sobre su pronóstico.

La manera en que las visiones afectan la asignación de los activos en el portafolio dependerá ampliamente de la certidumbre de las visiones. A mayor confianza en un pronóstico, mayor influencia tendrá éste en la asignación de la cartera.

Se define P como la matriz en que se expresan los activos participantes en las visiones del inversionista, de dimensiones K x N, donde K es el número de visiones y N la cantidad de activos disponibles; y Q, el vector donde se plasman los posibles retornos según las visiones existentes, por tanto de largo K. Entonces, es posible expresar el sistema de ecuaciones que contiene las rentabilidades que se especulan para el próximo período, de la siguiente forma:

$$P \cdot \mu = Q + \varepsilon^{(v)}$$

Donde $\varepsilon^{(v)}$ representa el error en las expectativas. Entonces es fácil ver que corresponde a una variable aleatoria normalmente distribuida, de media cero y varianza Ω, siendo ésta última una matriz diagonal que incorpora los niveles de confianza en las visiones.

De lo anterior, se tiene:

$$P \cdot \mu \sim N(Q, \Omega)$$

Por otro lado, se asume que:

$$\Pi \mid \mu \sim N(\mu, \tau\Sigma)$$

Entonces, se tienen las respectivas funciones de densidad de probabilidad:

$$fdp(P \cdot \mu) = \frac{k}{\sqrt{2\pi|\Omega|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(P \cdot \mu - Q)' \Omega^{-1} (P \cdot \mu - Q) \right)$$

$$fdp(\Pi \mid \mu) = \frac{k}{\sqrt{2\pi|\tau \cdot \Sigma|}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(\Pi - \mu)' (\tau \cdot \Sigma)^{-1} (\Pi - \mu) \right)$$

Pero lo que se quiere conocer es la rentabilidad esperada de los activos, dado que se conoce el equilibrio de mercado, entonces de acuerdo a la Ley de Bayes:

$$P(\mu \mid \Pi) = \frac{P(\Pi \mid \mu) \cdot P(\mu)}{P(\Pi)}$$

Si se reemplazan las funciones anteriormente descritas, se obtiene la función densidad de probabilidad de los retornos esperados condicionados al equilibrio de mercado. Por simplicidad, se eliminan los parámetros que serían absorbidos por las constantes de integración, quedando la fdp proporcional a:

$$fdp(\mu \mid \Pi) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(\Pi - \mu)' \cdot (\tau\Sigma)^{-1} (\Pi - \mu) - \frac{1}{2}(P \cdot \mu - Q)' \Omega^{-1} (P \cdot \mu - Q) \right)$$

A través de la función densidad de probabilidad, se obtiene la función generadora de momentos, y con ella los momentos de orden uno y dos, que corresponden a la media y la varianza respectivamente:

Media $\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q\right]$

Varianza $\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}$

Y de lo anterior se obtiene la rentabilidad esperada, que no es otra cosa que la media recién descrita:

$$\boxed{E[R] = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q\right]}$$

Resumiendo gráficamente:

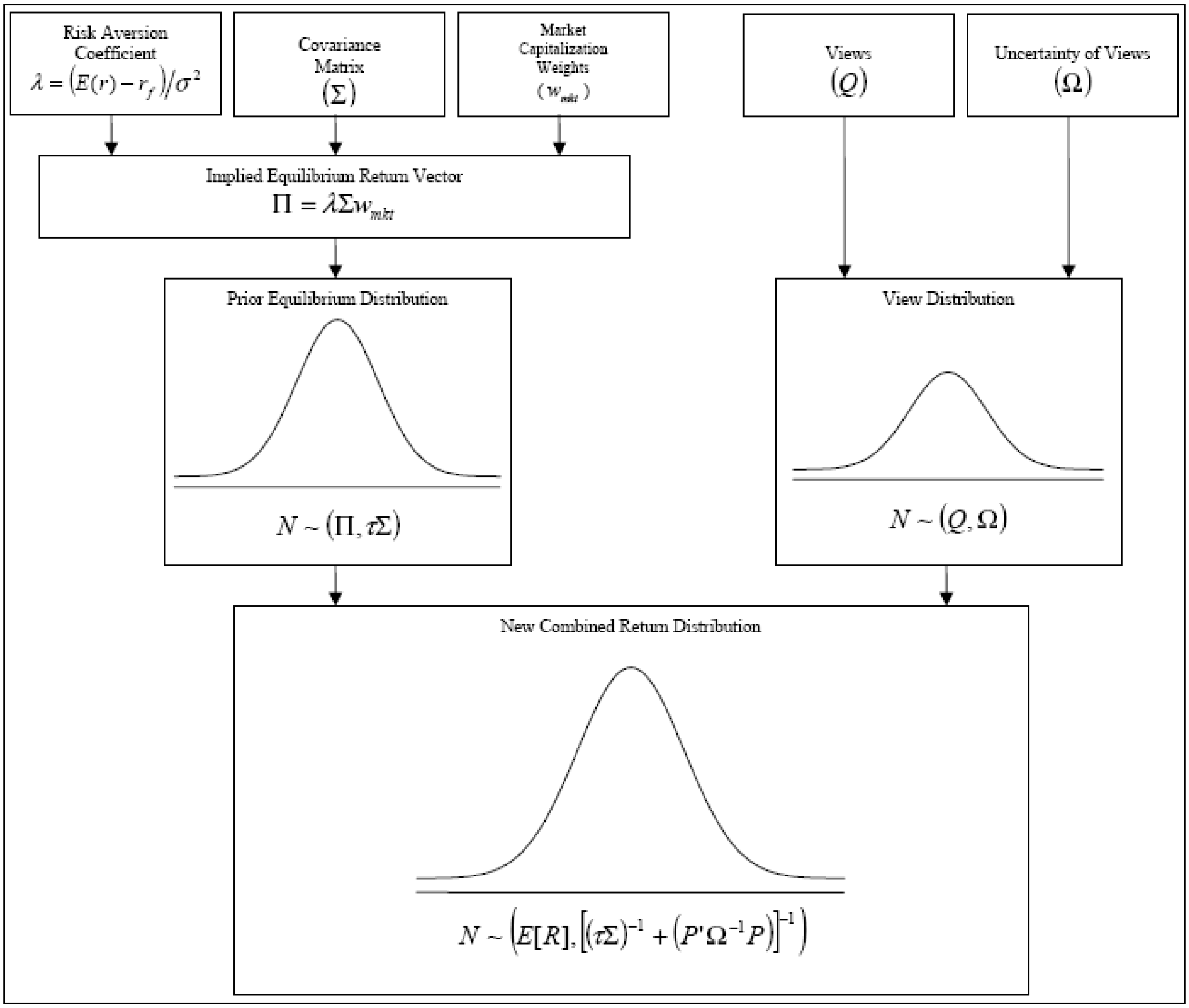

Ilustración 1: Distribución del Vector de Retornos Combinados.[3]

De este modo, las visiones de mercado indican al inversionista sobre qué activos podrá tomar posiciones ventajosas. Este modelo que ofrece la posibilidad de incorporar visiones de mercado, no excluye las oportunidades en que el inversionista carezca de expectativas para los activos. Es más, en ausencia de visiones el modelo entrega como rentabilidades esperadas, las correspondientes al estado de equilibrio.

Cuando el administrador no quiere incorporar visiones, basta anular la matriz P, es decir:

$$\overline{\mu} = \left[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} + 0' \cdot \Omega^{-1} \cdot 0\right]^{-1} \cdot \left[(\tau \cdot \Sigma)^{-1} \cdot \Pi + 0' \cdot \Omega^{-1} \cdot Q\right] \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overline{\mu} = \Pi}$$

Donde claramente, los retornos esperados equivalen a los valores de equilibrio.

[3] Fuente: Idzorek, Thomas. *"A Step-By-Step Guide To The Black-Litterman Model"*, 2004.

Puede observarse que, si quisiera utilizarse en el modelo de Markowitz los retornos de equilibrio como rentabilidades esperadas, el resultado obtenido sería exactamente el mismo que si se aplica Black-Litterman con ausencia de visiones.

Como en el modelo anterior, los retornos esperados se utilizan para optimizar el *trade off* riesgo-retorno, resultando portafolios que tienen en mayor proporción activos con mejores expectativas y altos niveles de confianza.

2.2.1 Supuestos Del Modelo.

Como punto de partida del modelo de Black-Litterman, se consideran los siguientes supuestos:

- Los retornos se encuentran normalmente distribuídos.
- Cada retorno sobre una inversión tiene asociado una distribución de probabilidad para el próximo período.
- Los inversionistas tienen visiones sobre los activos que podrían formar mejores portafolios.
- Puede estimarse un nivel de confianza para cada visión emitida.
- Los inversionistas no están absolutamente seguros sobre las visiones que emiten.
- Los riesgos son tomados sobre los activos en que se tienen visiones.
- Los portafolios sugeridos son comparados respecto a un portafolio de referencia o *benchmark*.
- Se ignoran todo tipo de impuestos y costos de transacción.
- Los mercados son eficientes, por tanto los precios reflejan toda la información disponible y se ajustan rápidamente a todas las variables que podrían afectar el valor de los activos.
- Los inversionistas son racionales.
- No existe el arbitraje.

3 Metodología De Implementación.

Con el fin de explicar de manera simple y gráfica cómo implementar los modelos de Markowitz y Black-Litterman, supondremos un universo bursátil compuesto por tres activos con 100% de presencia bursátil, para respetar las restricciones de liquidez, y se realizarán las asignaciones en la cartera de inversión mediante ambos modelos.

Tabla 1: Activos utilizados para la implementación de los modelos.

Activos	Peso Relativo IPSA	Presencia Bursátil
ANDINA-B	1,9201	100%
BSANTANDER	1,5225	100%
CAP	3,9527	100%

3.1 El Modelo De Markowitz Y El Problema De La Información.

Para la determinación de la frontera eficiente de Markowitz, se requiere en primer lugar, los retornos esperados para el siguiente período, valores que son estimados vía *Capital Asset Pricing Model* (CAPM). La ecuación que describe dicho modelo es la siguiente:

$$E(r) = r_f + \beta \cdot \left(E(r_m) - r_f\right)$$

Donde E(r) es la rentabilidad esperada para el activo en el próximo período, r_f corresponde a la tasa libre de riesgo, que en este caso es representada por la tasa de los bonos nominales del Banco Central de Chile a cinco años (BCP-5), r_m es la rentabilidad de mercado, que es representada por el retorno del Índice de Precio Selectivo de las Acciones (IPSA) de la Bolsa de Santiago, y β es un factor que refleja el nivel de riesgo que tiene el activo respecto al mercado. Para calcular el valor de este factor se realiza una regresión lineal entre los retornos semanales del IPSA y de cada uno de los activos, para un período de dos años o 106 semanas. Como un modo de ajustar los betas, disminuyendo su volatilidad, se considera en el medio la siguiente ecuación, fijada por convención:

$$\boxed{\beta_{ajustado} = \frac{2}{3} \cdot \beta + \frac{1}{3} \cdot 1}$$

La cual da origen a los siguientes valores, al 26 de octubre de 2007:

Tabla 2: Betas al 26 de Octubre, 2007[4].

Sociedad	Beta	Beta Ajustado
ANDINA-B	0,78	0,86
BSANTANDER	0,93	0,96
CAP	0,96	0,97

Una vez obtenidos los betas, es posible determinar los retornos estimados para el próximo período:

Tabla 3: Retornos esperados para el próximo período, método CAPM.

Sociedad	Beta Ajustado	Tasa Libre de Riesgo	Retorno de Mercado	Retorno Esperado
ANDINA-B	0,86	0,52%	3,23%	**2,84%**
BSANTANDER	0,96	0,52%	3,23%	**3,11%**
CAP	0,97	0,52%	3,23%	**3,15%**

[4] La validación de los Betas para las distintas sociedades se encuentra disponible en Anexos.

Con los retornos esperados es posible aplicar el modelo de Markowitz como se menciona en el marco teórico, sin embargo se requiere de dos inputs adicionales: los retornos históricos y las varianzas entre los distintos activos.

Para estimar las varianzas entre los retornos de los activos se dispone de las cintas de precios mensuales de las sociedades. Se considera que datos equivalentes a dos años son suficientes para observar como covarían los rendimientos de los precios de las acciones a la fecha del ejemplo.

Tabla 4: Matriz Varianza-Covarianza de los activos, al 26 de Octubre, 2007.

	ANDINA-B	BSANTANDER	CAP
ANDINA-B	0,0025	0,0007	0,0002
BSANTANDER	0,0007	0,0031	-0,0002
CAP	0,0002	-0,0002	0,0076

Una vez determinados los *inputs*, se procede a plantear el problema de minimización de la varianza de cada portafolio:

$$\text{Min} \qquad \sigma^2(r_p) = w^T \cdot \Sigma \cdot w = \begin{bmatrix} w_A & w_B & w_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}0025 & 0{,}0007 & 0{,}0002 \\ 0{,}0007 & 0{,}0031 & -0{,}0002 \\ 0{,}0002 & -0{,}0002 & 0{,}0076 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{bmatrix}$$

Sujeto a:

$$E(r_p) = \begin{bmatrix} w_A & w_B & w_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6{,}7\% \\ 7{,}14\% \\ 7{,}2\% \end{bmatrix}$$

$$w_A + w_B + w_C = 1$$

$$w_A \geq 0$$

$$w_B \geq 0$$

$$w_C \geq 0$$

Para resolver este problema, se escribe el Lagrangeano del problema y posteriormente se establecen las condiciones de primer orden. Detalles sobre la solución del problema de optimización se encuentran en Anexos.

Una vez resuelto el problema, se grafica la función objetivo, que incorpora las restricciones del problema, representando la frontera eficiente de Markowitz:

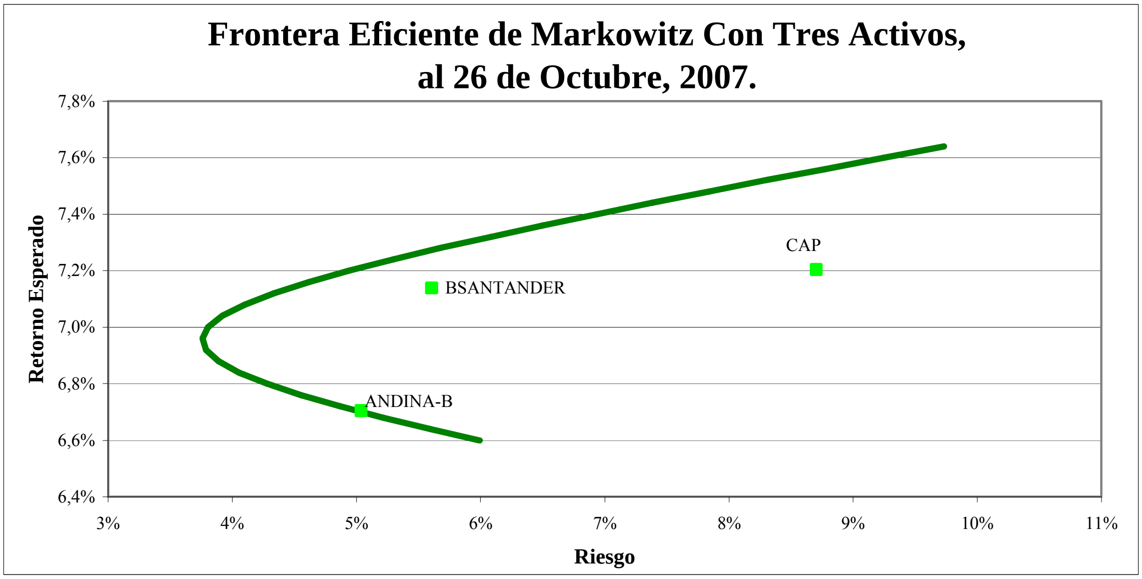

Gráfico 1: Gráfica de la Frontera Eficiente de Markowitz Para Tres Activos, al 26 de Octubre, 2007.

Los puntos de la frontera de inversión eficiente reflejan un portafolio para cada nivel de riesgo que se desee asumir, en particular se considera el de mínimo riesgo o mínima varianza que corresponde a la volatilidad de 3,76%.

Tabla 5: Composición del Portafolio de Mínima Varianza.

Sociedad	Peso Relativo	Retorno Esperado
ANDINA-B	44,0%	6,7%
BSANTANDER	37,1%	7,1%
CAP	18,9%	7,2%
Portafolio	**100%**	**7,0%**

Donde la composición de la cartera se obtiene reemplazando el nivel de riesgo asumido en las ecuaciones de los pesos relativos. Así, se conforma cada cartera como composición de los activos en consideración.

3.1.1 Problemas del Modelo

Es posible encontrar en la literatura algunas críticas al modelo de Markowitz, en relación a la sensibilidad que presenta a pequeños cambios en los datos. Aquí se muestra un pequeño ejemplo de su aplicación y los posibles problemas que se pueden encontrar:

Considérese el mismo universo de tres activos del ejemplo anterior, al cual se le modificará la cantidad de datos históricos ingresados. Para obtener resultados comparables, se fijará el nivel de riesgo que se desea asumir, observando en particular las carteras al 5% de riesgo.

Si se utiliza el modelo anterior, con distintas cantidades de información incorporada, como retornos históricos de los activos, puede obtenerse grandes variaciones en los portafolios sugeridos, asimismo como la rentabilidad esperada. A continuación se presenta un cuadro resumen de los resultados obtenidos para el portafolio de riesgo 5%, con variaciones en la cantidad de datos históricos y en el método de estimar el retorno esperado de cada activo.

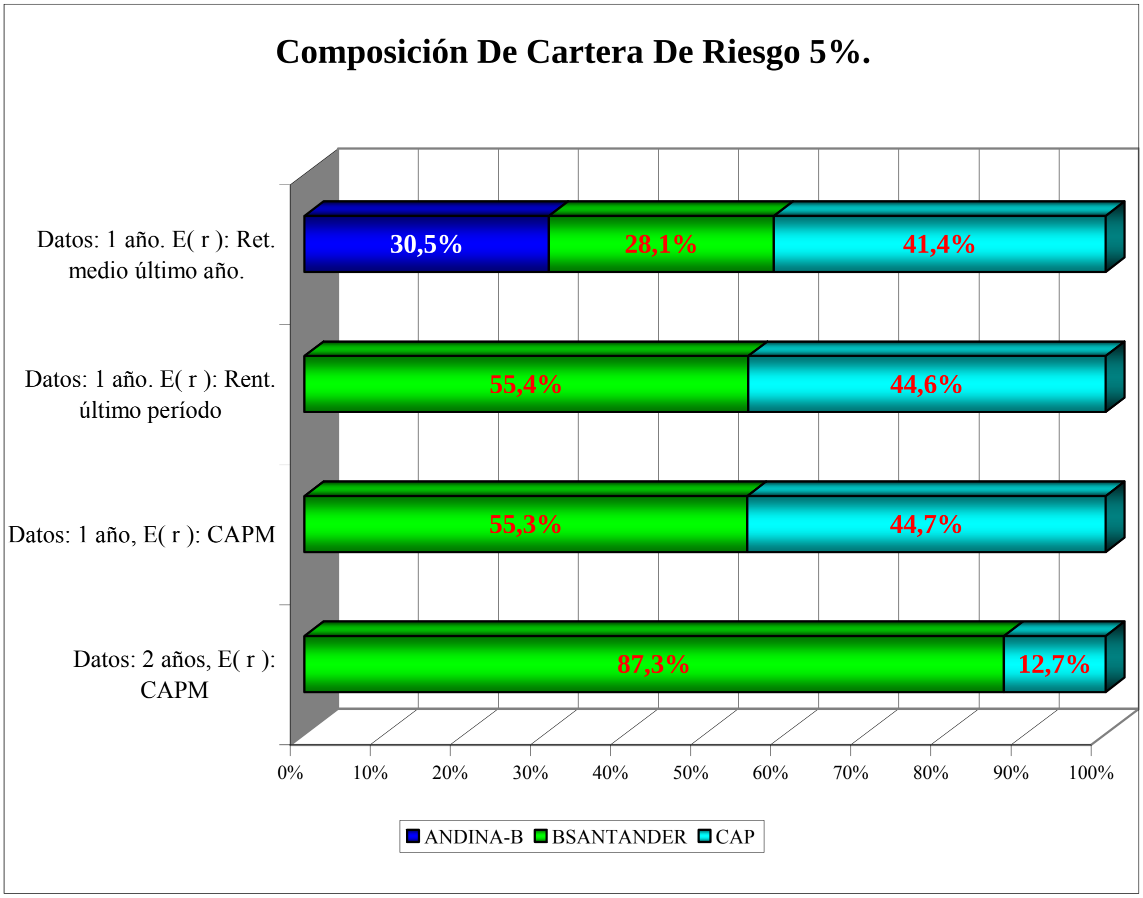

Gráfico 2: Comparación de de carteras de 5% de riesgo, sugeridas según distintos datos de entrada.

Obsérvese que las variaciones introducidas son formas de implementar el modelo que pueden ser adoptadas fácilmente por el inversionista, representando diferencias sustanciales en la composición de los portafolios generados.

La diferencia en los retornos obtenidos luego de transcurrido el período, presentan diferencias de hasta un 1,2%. Detalles sobre estos resultados se presentan en Anexos.

De lo anterior se puede observar que se generan carteras demasiado concentradas, y altamente sensibles a cambios en los datos históricos (*inputs* del modelo). Esto se explica por el tipo de solución al problema, donde los óptimos se encuentran en puntos-esquina factibles de solución, luego un cambio en la historia traslada el óptimo de un vértice a otro inmediatamente.

Conjuntamente con las debilidades mencionadas se pueden observar otras limitaciones del modelo[5]:

- Dado que la optimización de Markowitz no utiliza datos certeros sino estimadores, como el riesgo con varianzas y covarianzas, existen casos en que los errores podrían maximizarse. En particular sobrevalora los activos con altos retornos esperados y correlaciones negativas con el mercado e infravalora los activos con bajos retornos esperados y correlación positiva.
- En la práctica se utiliza un número limitado de activos, ya que se torna difícil de manipular las dimensiones matriciales.
- El modelo de Markowitz no considera la capitalización en el mercado. Esto podría ser un problema en la medida que un activo de baja capitalización presenta rendimientos considerablemente más altos que el mercado, o aún más si su correlación con el mercado es negativa. En estos casos, el modelo entregará portafolios fuertemente cargados a activos sin suficiente liquidez.
- Tampoco es capaz de diferenciar niveles de certidumbre sobre las expectativas de retornos, dado que ellas pueden obtenerse de diversos medios. Tampoco es posible incorporar más de una expectativa sobre un mismo activo. Es decir, no incluye visiones sobre el futuro que pudieren tener los analistas.

3.2 El Modelo De Black-Litterman.

Tal como se señala en el marco teórico, se da comienzo a la implementación del modelo de Black-Litterman con la generación de los retornos de equilibrio de mercado.

$$\Pi = \delta \cdot \Sigma \cdot w_{Mkt}$$

Donde el coeficiente de aversión al riesgo, δ, se considera con el valor 2,5 correspondiente a la aversión media mundial[6] y Σ la matriz varianza-covarianza de los retornos de los activos, pero ahora se consideran los retornos por sobre la tasa libre de riesgo del período con el fin de considerar exclusivamente las covarianzas de los riesgos de los activos en el equilibrio de mercado. Dicha matriz se muestra a continuación:

Tabla 6: Matriz varianza-covarianza de los activos al 26 de Octubre, 2007. Datos históricos utilizados equivalentes a dos años de antigüedad.

	ANDINA-B	BSANTANDER	CAP
ANDINA-B	0,0025	0,0007	0,0002
BSANTANDER	0,0007	0,0031	-0,0002
CAP	0,0002	-0,0002	0,0076

La capitalización de mercado, W_{Mkt}, se obtiene según la proporción que abarca cada activo en el índice IPSA, entregando las siguientes magnitudes:

[5] Fuente: R.O.Michaud, "*The Markowitz optimization Enigma: Is "Optimized" Optimal?"* (1989).
[6] Fuente: He & Litterman, "*The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolio*" (1999).

Tabla 7: Capitalización de los activos en el mercado.

Sociedad	Peso Relativo IPSA	WMkt
ANDINA-B	1,9	**26,0%**
BSANTANDER	1,5	**20,6%**
CAP	4,0	**53,4%**

Con los datos anteriores se obtiene el vector de retornos implícitos sobre la tasa libre de riesgo, al que se le adiciona la tasa promedio del bono nominal del Banco Central de Chile a cinco años (BCP-5) del mes de Octubre de 2007, valor que corresponde a 0,52% mensual. Los valores quedan así:

$$\Pi_{sobre\_rf} = \begin{bmatrix} 0{,}0025 \\ 0{,}0019 \\ 0{,}0105 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \Pi = \begin{bmatrix} 0{,}0077 \\ 0{,}0071 \\ 0{,}0156 \end{bmatrix}$$

Ahora que ya se tiene el equilibrio de mercado, se procede a recolectar información referente a las recomendaciones que se emiten en el ambiente financiero, o visiones, para los activos en cuestión. Aquí un resumen de las visiones para ANDINA-B, BSANTANDER y CAP:

Tabla 8: Visiones para el universo de activos disponible, emitidas al 26 de Octubre, 2007.

Agente Emisor	Fecha Emisión	Certeza Emisor	Sociedad	Plazo	Tendencia	Precio Objetivo	Retorno Esperado	Precio al 26-Oct-07	Retorno Esperado a un mes
Santander-Investment	10-Ago-07	92%	ANDINA-B	inicios 2008	Mantener	1.960		1.720,00	4,4%
BanChile	19-Oct-07	50%	ANDINA-B		Comprar		12,80%	1.720,00	1,1%
BanChile	19-Oct-07	50%	BSANTANDER		Comprar		11,20%	26,21	0,9%
Security	01-Dic-06	40%	BSANTANDER	Dic-07	Mantener	27,70		26,21	2,8%
Santander-Investment	15-Oct-07	92%	CAP	inicios 2008	Mantener	18.240		16.218,00	3,9%
BanChile	19-Oct-07	68%	CAP	Dic-08	Reducir		-16,40%	16.218,00	-1,4%

Los retornos esperados para el período en cuestión, se combinan ponderando por el nivel de certeza del emisor, que han sido calculados según la metodología que se explica en el subcapítulo 3.2.1.

Entonces, las recomendaciones pueden resumirse en tres sentencias principales:

- ANDINA-B presentará una rentabilidad de 3,5% para el próximo período (un mes), con una desviación estándar en las predicciones de 0,023.
- BSANTANDER presentará una rentabilidad de 1,9% para el próximo período, con una desviación estándar en las predicciones de 0,013.
- CAP presentará una rentabilidad de 1,8% para el próximo período, con una desviación estándar en las predicciones de 0,037.

Con estas sentencias pueden construirse los *inputs* del modelo, referentes a las visiones de mercado, como se verá a continuación.

Matriz de activos participantes en las visiones:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vector de rentabilidades señaladas en las visiones:

$$Q = \begin{bmatrix} 0{,}0348 \\ 0{,}0193 \\ 0{,}0181 \end{bmatrix}$$

Matriz de covarianzas de las incertezas en las visiones (desviaciones estándar):

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0{,}023 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}013 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}037 \end{bmatrix}$$

Para cada activo es posible encontrarse en tres escenarios: que cuente con ninguna recomendación, que cuente con una recomendación o con más de una. Si no existe ninguna recomendación, el modelo considera solo los retornos históricos y este activo no se incluye en la matriz de participación de visiones (P).

La cantidad de recomendaciones que existan sobre un activo influye en la visión final sobre el mismo, si existe una sola recomendación la visión es exactamente igual a la recomendación, si existe mas de una, la visión se considera la resultante del promedio de las rentabilidades recomendadas ponderadas por la probabilidad de acierto histórico de cada agente emisor de la recomendación.

Cómo se ha comentado previamente, el valor cero para la certeza sobre la visión implica asignar un 100% de confianza sobre la misma, por tanto, si existe más de una recomendación sobre un activo, resulta natural pensar en la desviación estándar de las recomendaciones como el nivel de certeza más pertinente para dicha visión. Mayor sentido cobra este hecho, si se observa que el intervalo de confianza abarcará 2/3 de la probabilidad considerando este parámetro.[7]

Sin embargo, cuando existe sólo una recomendación, la desviación estándar es un parámetro infactible y, a menos que se tenga 100% de certeza sobre la recomendación, parece pertinente utilizar los valores sugeridos por Black y Litterman en su *Global Portfolio Optimization* (1992), que consisten en retomar que la matriz **Ω** representa la varianza de la distribución Normal que sigue P·μ, entonces puede escribirse de la siguiente manera:

$$\Omega = Diag(P \cdot \tau\Sigma \cdot P')$$

[7] Esto es analizado exhaustivamente por Mankert, C. "*The Black-Litterman Model - mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice.*"

Una vez determinadas las entradas del modelo, es momento de discutir que valor se asignará al parámetro τ. No hay un criterio uniforme para este valor en la literatura, sin embargo se puede definir según el nivel de importancia de las variables utilizadas.

La mayoría de los autores, incluyendo a Black y Litterman, postulan que el valor de τ debe ser mucho menor que uno (incluso cercano a cero), debido a que la incerteza sobre la media de la distribución es mucho menor que la incerteza sobre la varianza de los retornos implícitos, lo que es muy coherente con los supuestos de distribución asignados a las variables en un origen. Por otro lado se encuentra la postura de Satchell y Scowcroft, quienes sugieren que τ debiese ser lo más cercano a uno posible, ya que la varianza de la distribución debe mantenerse sin modificaciones a las covarianzas históricas de los activos.

En lo que se refiere a este capítulo, se considera un valor para τ de 0,01, que es la magnitud recomendada por los autores del modelo.

Con todo lo anterior, se calcula el vector de retornos esperados de Black-Litterman, según la ecuación:

$$E[R] = \left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q\right]$$

Obteniéndose:

$$E(r) = \begin{bmatrix} 0{,}77\% \\ 0{,}71\% \\ 1{,}57\% \end{bmatrix}$$

Estos valores para la rentabilidad esperada del próximo período se insertan en el problema de optimización de riesgo-retorno, que se presentó al principio, planteándose para este caso particular:

$$\text{Min} \quad \sigma^2(r_p) = w^T \cdot \Sigma \cdot w = \begin{bmatrix} w_A & w_B & w_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}0026 & 0{,}0008 & 0{,}0003 \\ 0{,}0007 & 0{,}0032 & -0{,}0002 \\ 0{,}0003 & -0{,}0002 & 0{,}0076 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{bmatrix}$$

Sujeto a:

$$E(r_p) = \begin{bmatrix} w_A & w_B & w_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}77\% \\ 0{,}71\% \\ 1{,}57\% \end{bmatrix}$$

$$w_A + w_B + w_C = 1$$

$$w_A \geq 0$$

$$w_B \geq 0$$

$$w_C \geq 0$$

La nueva función objetivo entrega la frontera eficiente de inversión, en ella también se muestra la relación riesgo retorno implícito de cada activo por sí solo:

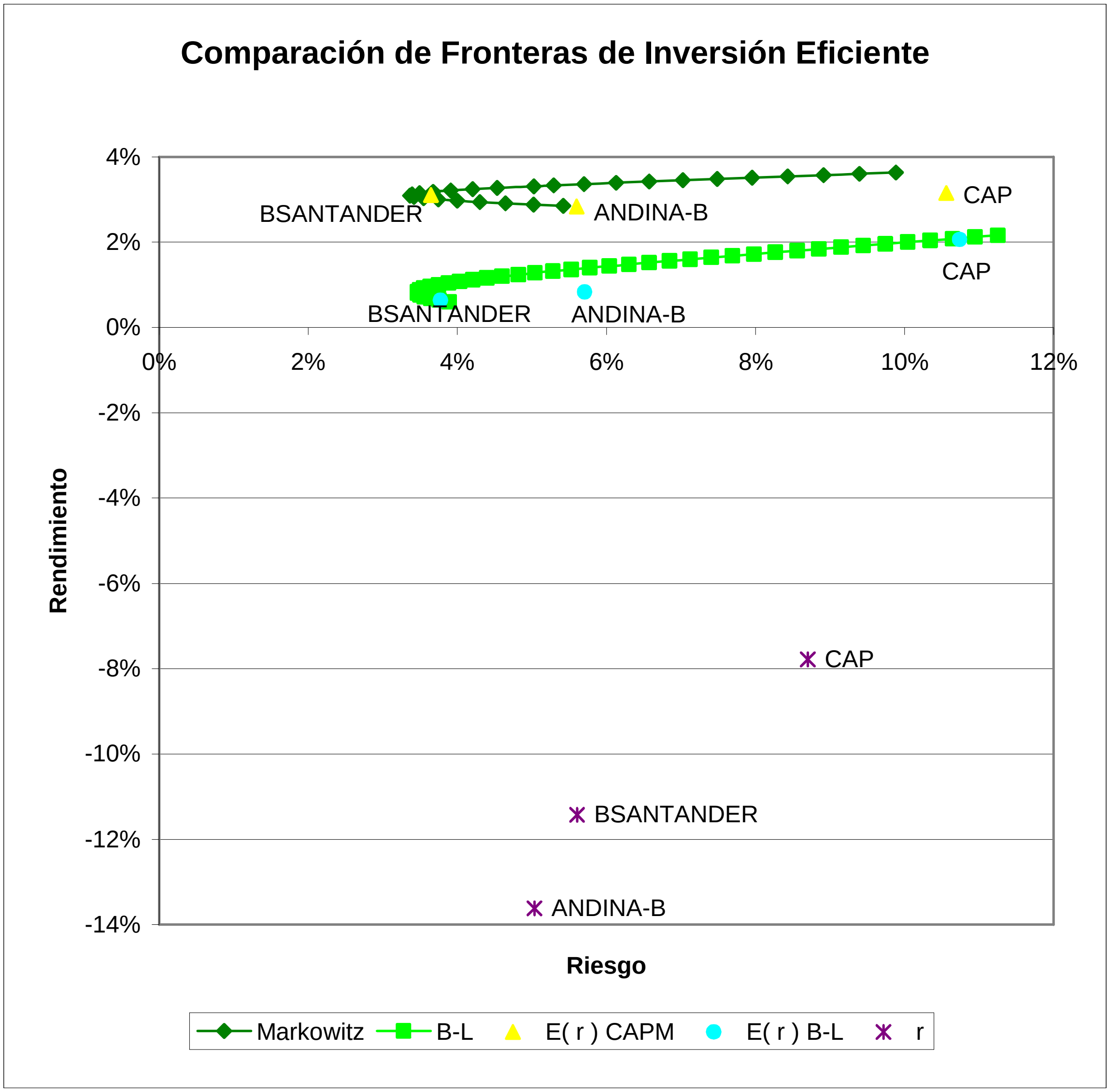

Gráfico 3: Fronteras eficientes de inversión, según retornos esperados por modelo de Black-Litterman y por Markowitz. Datos históricos de dos años, al 26 de Octubre, 2007. Retornos efectivos de los activos, en dicho período.

Tal como en el modelo anterior, los puntos de la frontera de inversión eficiente reflejan un portafolio para cada nivel de riesgo a asumir, en particular se considera el de mínimo riesgo o mínima varianza que corresponde a la volatilidad de 3,88%.

Tabla 9: Composición del Portafolio de Mínima Varianza.

Sociedad	Peso Relativo	Retorno Esperado
ANDINA-B	43,0%	0,77%
BSANTANDER	36,8%	0,71%
CAP	20,2%	1,57%
Portafolio	**100%**	**0,91%**

Donde la composición de la cartera se obtiene reemplazando el nivel de riesgo asumido en las ecuaciones de los pesos relativos. Así, se conforma cada cartera como composición de los activos en consideración.

Es importante notar que este modelo no enfrenta la problemática de la elección de datos a incorporar en el modelo, como la rentabilidad esperada para cada activo, ya que provee por si mismo la data que es requerida.

Si se compara las rentabilidades esperadas y efectivas de las distintas carteras previamente obtenidas, se encuentra:

Tabla 10: Comparación de rentabilidades esperadas versus el retorno efectivo.

Sociedades	E(r) CAPM	E(r) = $r_{último}$	E(r) = r_{Medio}	E(r) Black-Litterman		Retorno
				Un año	Dos años	Efectivo
ANDINA-B	2,84%	-3,72%	1,90%	0,83%	0,77%	**-13,62%**
BSANTANDER	3,11%	2,83%	0,63%	0,63%	0,71%	**-11,43%**
CAP	3,15%	16,87%	7,35%	2,06%	1,57%	**-7,78%**

Puede observarse que el retorno del período fue mucho menor que cualquier estimación, lo que se debe a la contingencia del momento. A grosso modo puede decirse que en dicha fecha se estaba viviendo la crisis hipotecaria norteamericana, que nunca se pensó que podría ser tan pronunciada, por tanto las expectativas sobre los activos en cuestión no acusaron grandes bajas.

Sin embargo es relevante notar las diferencias que presentan entre sí las tres primeras estimaciones sobre los retornos esperados, que son considerables. Al mismo tiempo, las diferencias que entrega el modelo de B-L para cantidades de datos históricos diferentes nos son tan grandes como en el otro caso, y eso se debe a que este modelo considera que un inicio el mercado está en equilibrio y desde ahí entrega retornos esperados para los activos.

No obstante lo anterior, es posible verificar el comportamiento de las carteras de mínima varianza en cada uno de los casos planteados con antelación.

Tabla 11: Rentabilidad de los portafolios de mínima varianza sugeridos por cada modelo.

Sociedad	Datos a dos años		Datos a un año			
	Markowitz	B-L	E(r) CAPM	E(r) = $r_{\text{último}}$	E(r) = r_{Medio}	B-L
ANDINA-B	43%	43%	9%	7%	8%	8%
BSANTANDER	38%	37%	80%	81%	79%	79%
CAP	19%	20%	11%	12%	13%	13%
Rentabilidad	-11,67%	**-11,63%**	-11,20%	-11,16%	-11,13%	**-11,11%**

Se observa que para cada caso, el portafolio sugerido con las rentabilidades esperadas de Black-Litterman entrega una rentabilidad mayor. Se aprecia que las diferencias son pequeñas, pero este se debe a que los portafolios son pequeños, en el capítulo cuatro es posible apreciar cuan diferentes pueden resultar los portafolios para cada modelo.

Se considera que utilizar datos históricos de dos años implica incorporar información histórica demasiado antigua, que no necesariamente refleja el comportamiento reciente de los activos, sino que una conducta que ya no es válida. Esto se hace evidente en el hecho de que las rentabilidades obtenidas sean más acertadas, al momento de compararlas con las efectivas, cuando se utilizan datos de un año de antigüedad.

Dado lo anterior se decide, desde ahora en adelante, utilizar data histórica de un año de precedencia.

Se observa también, que los retornos fueron mucho más bajos de lo esperado, pero aún así el modelo de Black-Litterman entregó predicciones más aproximadas que las esperadas vía Markowitz.

3.2.1 Nivel De Certeza De Las Recomendaciones.

Dentro de este modelo hay dos conceptos distintos que deben aclararse, el nivel de confianza sobre las visiones y la certeza de cada recomendación. La primera se refiere al rango de confianza de la distribución, y está dado por la desviación estándar entre las rentabilidades esperadas sugeridas para el período en cuestión; y la segunda se refiere a la probabilidad de éxito que tiene cada recomendación. Este último valor está asociado a la recomendación que se entrega (ya sea comprar, mantener o reducir), al instante de tiempo que se esté analizando, y al agente emisor de cada recomendación.

La metodología empleada para obtener la probabilidad de acierto en las recomendaciones es bastante sencilla, simplemente se recoge un universo de recomendaciones bastante amplio por agente emisor y se calcula los casos favorables sobre el total de recomendaciones.

Considerando que hay principalmente tres tipos de sugerencias bursátiles: comprar, mantener o reducir, se establece un rango de acierto para cada una de ellas.

- Comprar: Rentabilidad obtenida a posteriori superior a 5% sobre la rentabilidad del IPSA. Para el caso de "Compra Fuerte", se exige una rentabilidad sobre el IPSA de 15%.
- Mantener: Rentabilidad del activo entre -5% y 5% sobre el retorno del IPSA.

- Reducir: Retorno del período inferior a -5% sobre el IPSA.

Sin embargo, se establece también como caso favorable cuando se recomienda mantener la acción y el retorno es superior a 5% relativo al IPSA, pero no es acertado por el costo de oportunidad que involucra no haber comprado acciones que rentarían tal nivel.

Considerando que las recomendaciones entregadas son de largo plazo, generalmente entre 12 y 18 meses, la rentabilidad obtenida se evalúa entre el precio del activo a la fecha de la emisión de la sugerencia y el precio promedio mensual, para los siguientes 11 a 18 meses, considerando acierto si la recomendación se cumple en al menos uno de los meses examinados.

Con la información anterior es posible establecer probabilidades de acierto para cada año, tipo de recomendación y agente emisor. Por último, se entrega la probabilidad anual de todos los casos positivos, es decir de acierto y los casos favorables que se mencionaron anteriormente.

Los agentes estudiados para este trabajo de título son:

- BanChile Corredores de Bolsa.
- CB punto cl.
- BCI Corredores de Bolsa.
- Santander-Investment Corredores de Bolsa.
- Security Corredores de Bolsa.
- Tanner Corredores de Bolsa S.A.

Aquí se entrega un cuadro resumen de las probabilidades obtenidas según esta metodología:

Tabla 12: Probabilidad de acierto de las recomendaciones entregadas por corredoras de bolsa.

Año	Recomendación	BanChile	BCI	CB	Santander	Security	Tanner
2000	Comprar				75%		40%
	Mantener				100%		62%
	Vender						77%
	Favorables				88%		69%
	Desfavorables				13%		31%
2001	Comprar				48%		66%
	Mantener				70%		57%
	Vender				100%		52%
	Favorables				63%		74%
	Desfavorables				38%		26%
2002	Comprar				71%		48%
	Mantener				69%		69%
	Vender						
	Favorables				78%		69%
	Desfavorables				23%		31%
2003	Comprar			59%	50%		47%
	Mantener			14%	53%		74%
	Vender			100%	100%		44%
	Favorables			58%	64%		62%
	Desfavorables			42%	36%		38%
2004	Comprar			73%	48%		37%
	Mantener			10%	13%		82%
	Vender				100%		50%
	Favorables			57%	51%		75%
	Desfavorables			43%	49%		25%
2005	Comprar	38%		33%	84%	74%	
	Mantener	61%			43%	0%	
	Vender	45%			100%		
	Favorables	54%		33%	71%	71%	
	Desfavorables	46%		67%	29%	29%	
2006	Comprar	46%	100%		39%	54%	
	Mantener	63%	50%		78%	33%	
	Vender	62%				0%	
	Favorables	59%	75%		49%	55%	
	Desfavorables	41%	25%		51%	45%	
2007	Comprar	44%	50%		33%	80%	
	Mantener	80%	0%		25%	100%	
	Vender	44%				0%	
	Favorables	61%	33%		50%	89%	
	Desfavorables	39%	67%		50%	11%	

Analizando las series de tiempo de las probabilidades de acierto sobre las recomendaciones emitidas, sólo para los casos "vender" y "mantener" se ha encontrado particularidades destacables.

- Recomendaciones de Venta:

Se observa que Santander Investment acierta un 100% de los casos en que emite esta recomendación, considerando los plazos a los que emite sus precios objetivo.

Mientras que Tanner no presenta un patrón para el corto plazo, se puede observar que casi en la totalidad de las recomendaciones de largo plazo acierta, en el caso de "vender".

Visiones de corto plazo:

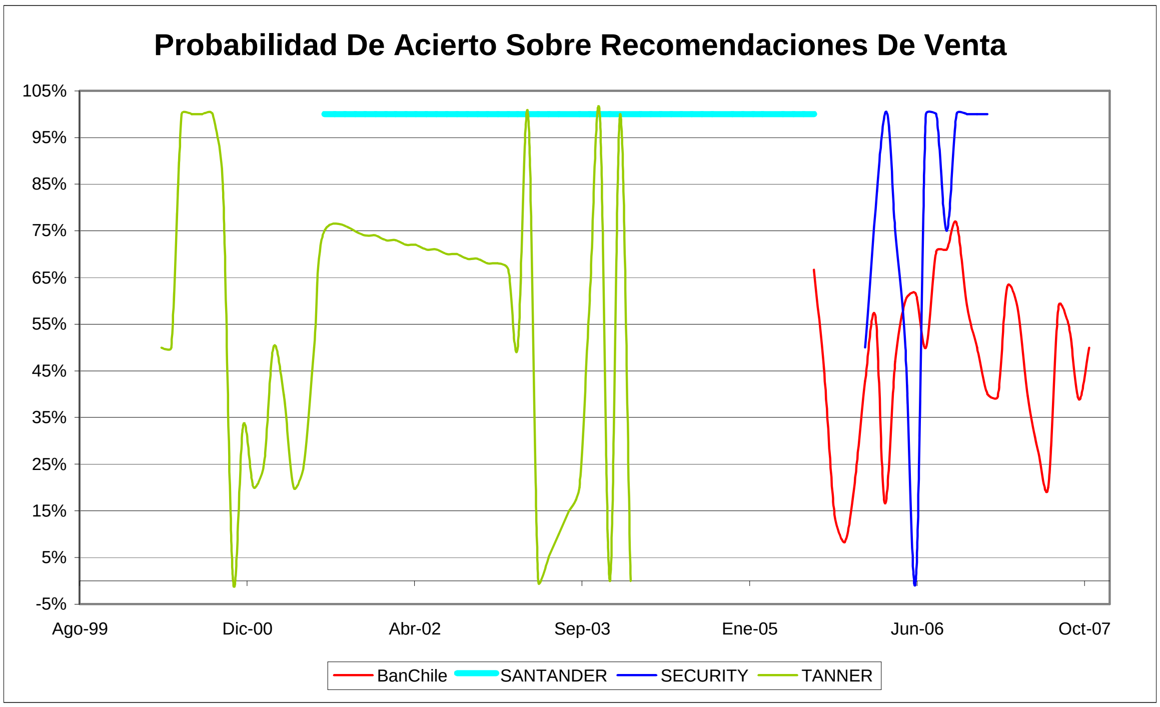

Gráfico 4: Probabilidad de acierto, en el corto plazo, de la recomendación "venta" de los distintos emisores.

Visiones de largo plazo:

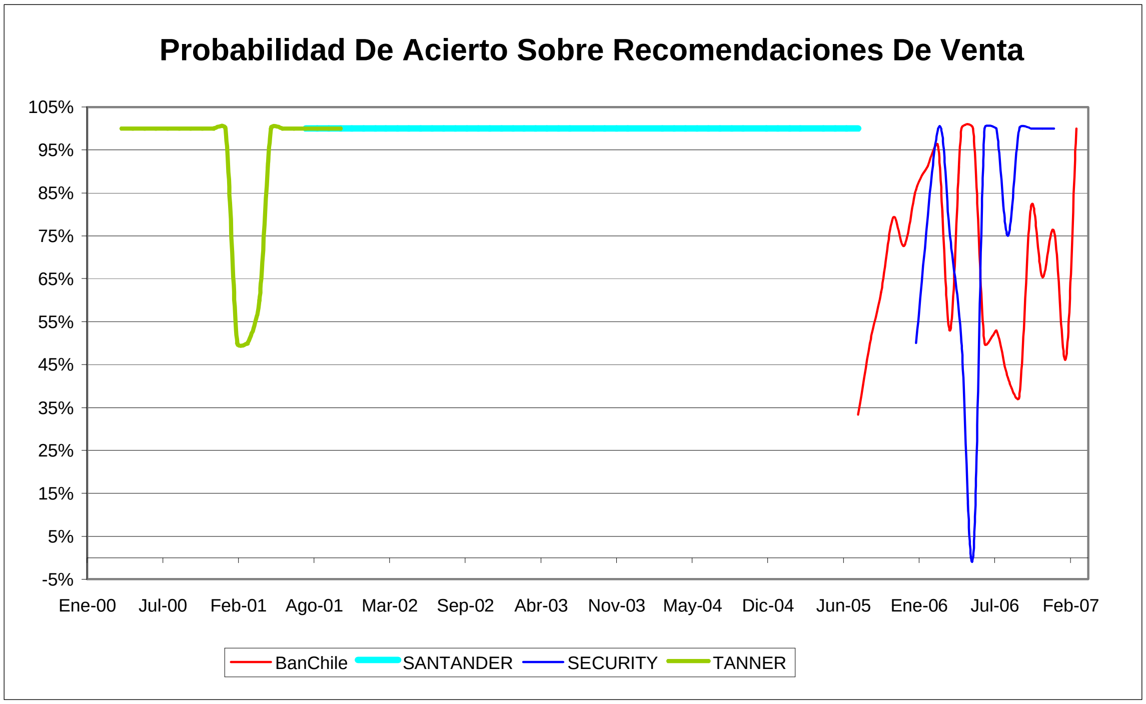

Gráfico 5: Probabilidad de acierto, en el largo plazo, de la recomendación "venta" de los distintos emisores.

- Recomendaciones de Mantener:

Es posible observar que en el corto plazo, la corredora de bolsa CB punto cl, falla en todas las recomendaciones de mantener (o neutral) que emitió para el periodo en estudio.

Aunque las otros agentes emisores no presentan patrones determinables, cabe destacar que Tanner y BanChile aciertan en un rango acotado de probabilidad, siendo estos rangos mayores en el corto plazo.

Visiones de corto plazo:

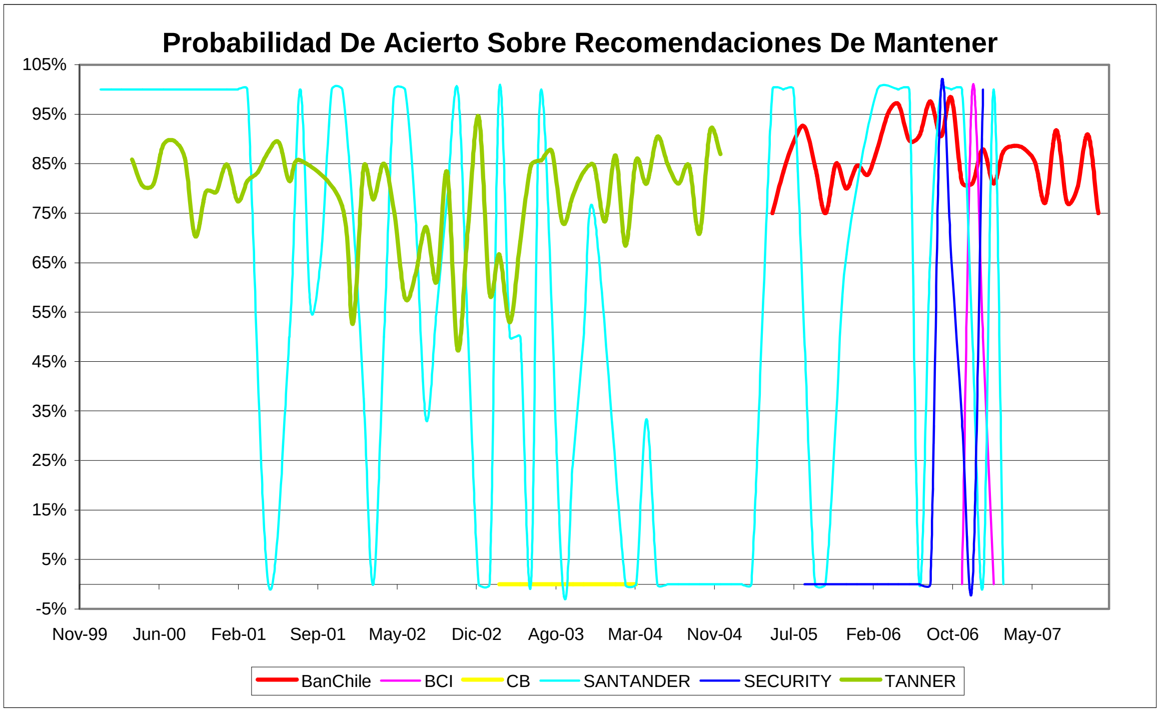

Gráfico 6: Probabilidad de acierto, en el corto plazo, de la recomendación "mantener" de los distintos emisores.

Visiones de largo plazo:

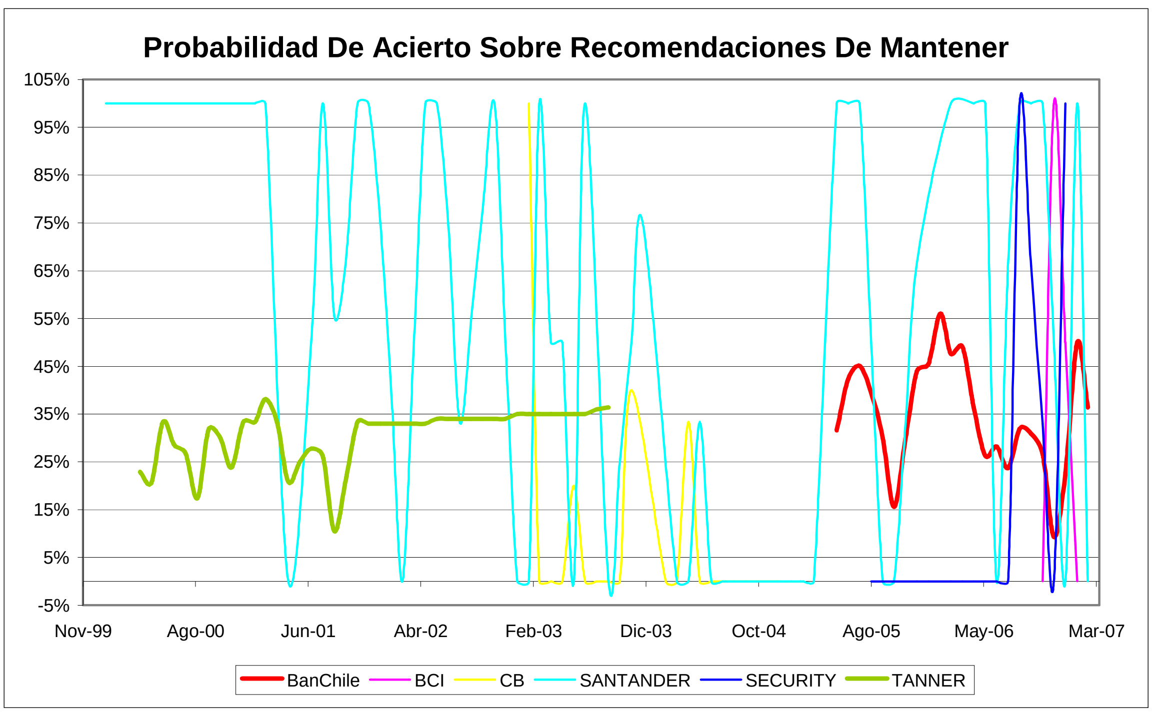

Gráfico 7: Probabilidad de acierto, en el largo plazo, de la recomendación "mantener" de los distintos emisores.

4 Resultados.

Acorde al objetivo general de este trabajo, se procede a implementar los modelos de Markowitz y Black-Litterman, para posteriormente comparar las fronteras eficientes de inversión y los resultados que ambos modelos entregan para iguales niveles de riesgo. Para dicha implementación se considera un universo de 19 activos chilenos transados en la Bolsa de Comercio de Santiago, entre los años 2000 y 2007 y con 100% de presencia bursátil durante este último año, por tanto incluidas en el índice bursátil IPSA de la misma institución[8]. Lo anterior se debe a los requerimientos de liquidez de los activos para modificar las carteras mensualmente, de acuerdo a la asignación que indiquen los modelos.

Una vez construídos los modelos se simula el comportamiento de ambos, esto se hace en períodos mensuales entre los años 2002 y 2007, considerando los precios de cierre de cada mes y las visiones de mercado que entregan cinco empresas corredoras de bolsa en Chile. Para verificar cual modelo entrega mejores resultados, se observa la diferencia entre rendimientos esperados del portafolio y retornos obtenidos en el mismo período.

Con la información reunida y los modelos construidos, se construyen las fronteras de inversión eficiente, considerando en particular asignaciones de activos para tres portafolios con niveles de riesgo distintos: Mínimo, 4% y 5%. Posteriormente, se comparan las rentabilidades acumuladas en el tiempo para cada nivel.

En este capítulo se muestra cómo el modelo de Black-Litterman desplaza la frontera eficiente de inversión, postulando un *trade off* riesgo-retorno más conveniente que el enfrentado con el modelo de Markowitz.

Posteriormente se realiza una comparación entre las rentabilidades esperadas y efectivas, analizando la capacidad predictiva de cada modelo y se finaliza con una comparación de los resultados expuestos en este trabajo con los del mercado nacional para el mismo período.

4.1 Comparación De Fronteras Eficientes De Inversión.

Se expone la frontera eficiente de inversión resultante de la construcción de cada modelo para los períodos mencionados de la misma forma que se hizo en el capítulo de metodología de implementación, esta vez con un universo de 19 activos. En cada período se observa la frontera que propone Markowitz, utilizando los retornos esperados por CAPM, y la frontera que entrega Black-Litterman, incorporando una visión de futuro para la rentabilidad esperada de los activos. En general, se puede ver que incorporando una corrección para el futuro, se obtienen valores que se ajustan más a lo que efectivamente sucede una vez que transcurre el período.

Dicho de otra forma, se observa que las asignaciones sugeridas por el modelo Black-Litterman son más diversificadas en los portafolios que las asignaciones de Markowitz, lo que implica riesgos menores para similares niveles de rentabilidad.

[8] En anexos se encuentra el detalle de los activos involucrados en esta simulación.

Lo expuesto anteriormente se puede observar en la gráfica siguiente, que corresponde a las fronteras de eficiencia de inversión para el primer período en estudio: Enero, 2002.

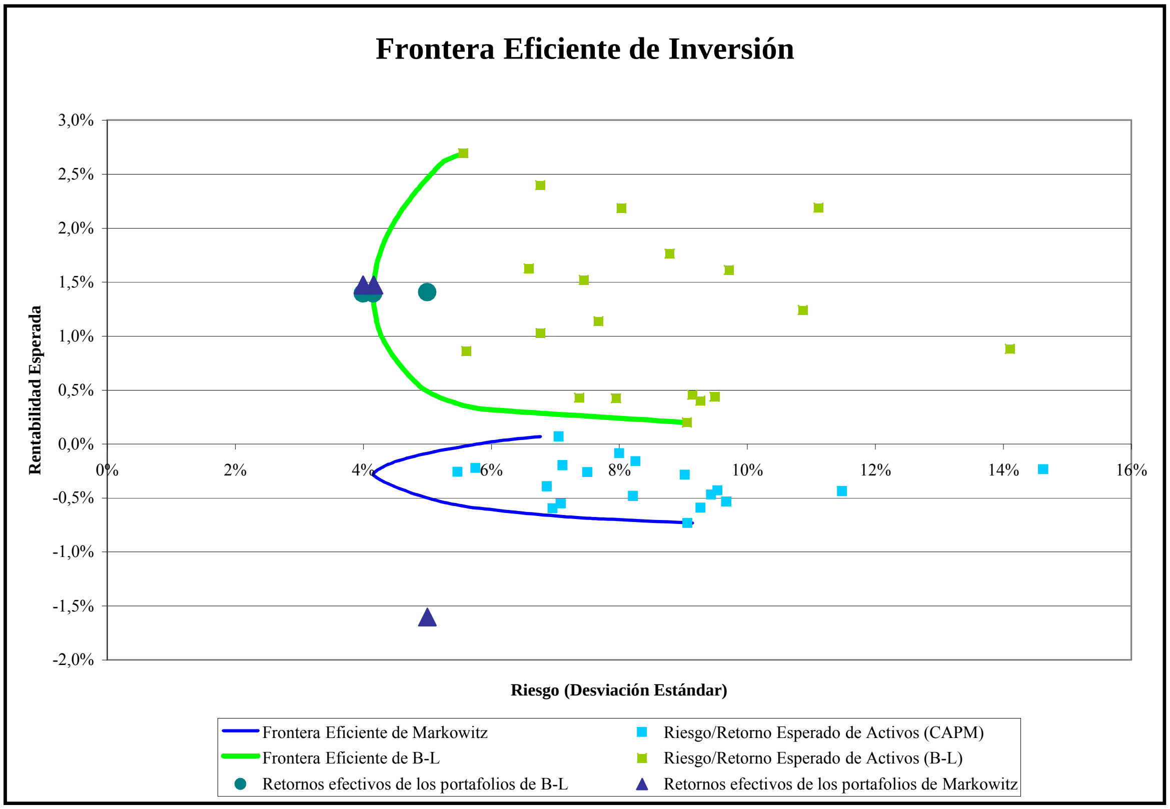

Gráfico 8: Comparación de fronteras eficientes de inversión según modelos de Black-Litterman y Markowitz, para 25 de Enero, 2002.

En el gráfico se presentan, mediante puntos, los niveles de riesgo y de rentabilidades esperadas para los 19 activos, obtenidos mediante el método de CAPM y Black-Litterman. Se ve con claridad que a partir de ellos se genera las fronteras de eficiencia mediante la minimización de la varianza de los portafolios. Se aprecia la diferencia en la escala de rendimiento, para valores similares de riesgo. Inmediatamente surge el cuestionamiento sobre la frontera que más representa la realidad bursátil, y esto es posible de responder al representar en el gráfico las tres carteras que sugiere cada modelo para los casos de riesgo mínimo, 4% y 5%. Es claro que los dos riesgos menores presentan rentabilidades muy similares, siendo las de Markowitz ligeramente superiores. No obstante lo anterior, se puede notar que para el caso del portafolio con riesgo 5%, Black-Litterman sugirió una cartera que presentó un retorno efectivo de 1,41%, en línea con los otros retornos mencionados, pero el portafolio de Markowitz para igual riesgo, presento un retorno efectivo de -1,60%.

El desplazamiento de la frontera propuesta en ambos casos se debe principalmente a que el método para estimar los retornos para cada activo es distinto. Como se expuso en el marco teórico el modelo de Black-Litterman involucra recomendaciones que emiten analistas del mercado bursátil, incluyendo en la estimación una visión de futuro, y no solo los retornos históricos.

En la gran mayoría de los períodos, el rango de riesgo que los inversores pueden asumir es más amplio en el caso de Black-Litterman y contiene el rango propuesto por Markowitz. Es decir, la desviación estándar mínima y máxima son más extremas que las que propone Markowitz, respectivamente. En anexos se pueden encontrar fronteras correspondientes a otros períodos, así como los rangos de riesgos a asumir.

4.2 Comparación De Resultados Obtenidos Con Ambos Modelos.

La mejor manera de comparar los resultados que entrega cada modelo, es considerando los retornos acumulados en el tiempo, esta información se obtiene en cuatro series distintas, que corresponden a:

- Los rendimientos esperados acumulados, sugeridos por Markowitz.
- Los retornos efectivos acumulados, para los portafolios asignados según la frontera de Markowitz.
- Los rendimientos esperados acumulados, sugeridos por Black-Litterman.
- Los retornos efectivos acumulados, para los portafolios asignados según la frontera de Black-Litterman.

Las series mencionadas se evalúan para los distintos niveles de riesgo mencionados.

4.2.1 Retornos De Los Portafolios De Mínima Varianza.

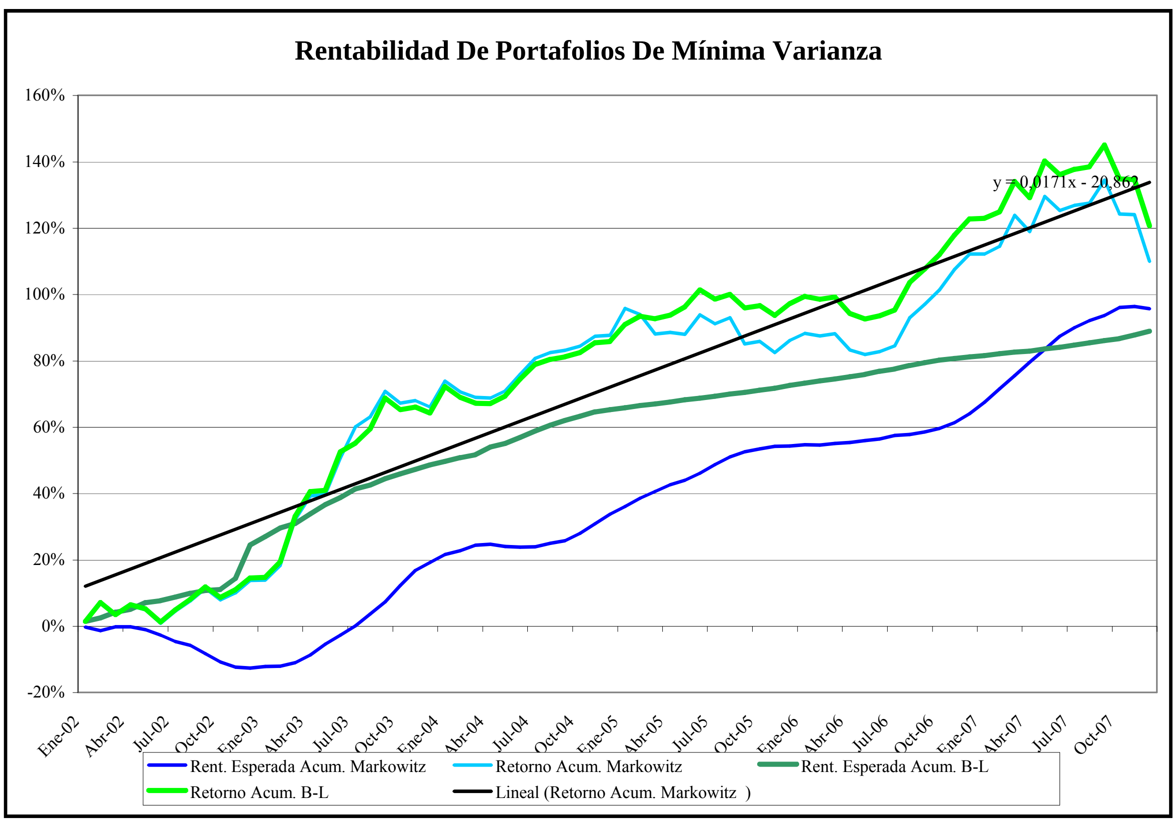

Gráfico 9: Evolución de los retornos acumulados según ambos modelos, para el portafolio de mínima varianza, comparados con las rentabilidades esperadas.

Las series en tonos azules corresponden a las asignaciones de Markowitz, mientras que las verdes corresponden a las asignaciones de activos de Black-Litterman. Se observa que la series esperada y efectiva de B-L son más ajustadas que en el caso de las series de Markowitz.

Entonces, para el caso de mínima varianza, se observa que la rentabilidad acumulada hacia el final del período es mayor en la serie de asignación de Black-Litterman que en la de Markowitz.

Tabla 13: Análisis de las series acumuladas de portafolios de mínimo riesgo.

	Markowitz	Black-Litterman
Rentabilidad Acumulada	95,7%	88,9%
Retorno Efectivo Acumulado	110,0%	120,6%
Error En La Predicción	15%	36%
Pendiente De Tendencia	0,017	0,019

Cabe notar que aunque el error de la predicción de B-L es mayor, la pendiente de la línea de tendencia de sus retornos acumulados es mayor que la de Markowitz. Esto permite extrapolar hacia el futuro el comportamiento de las series analizadas, sin dejar de lado que la economía es cambiante e inestable la mayor parte del tiempo.

4.2.2 Retornos De Los Portafolios de Riesgo 4%.

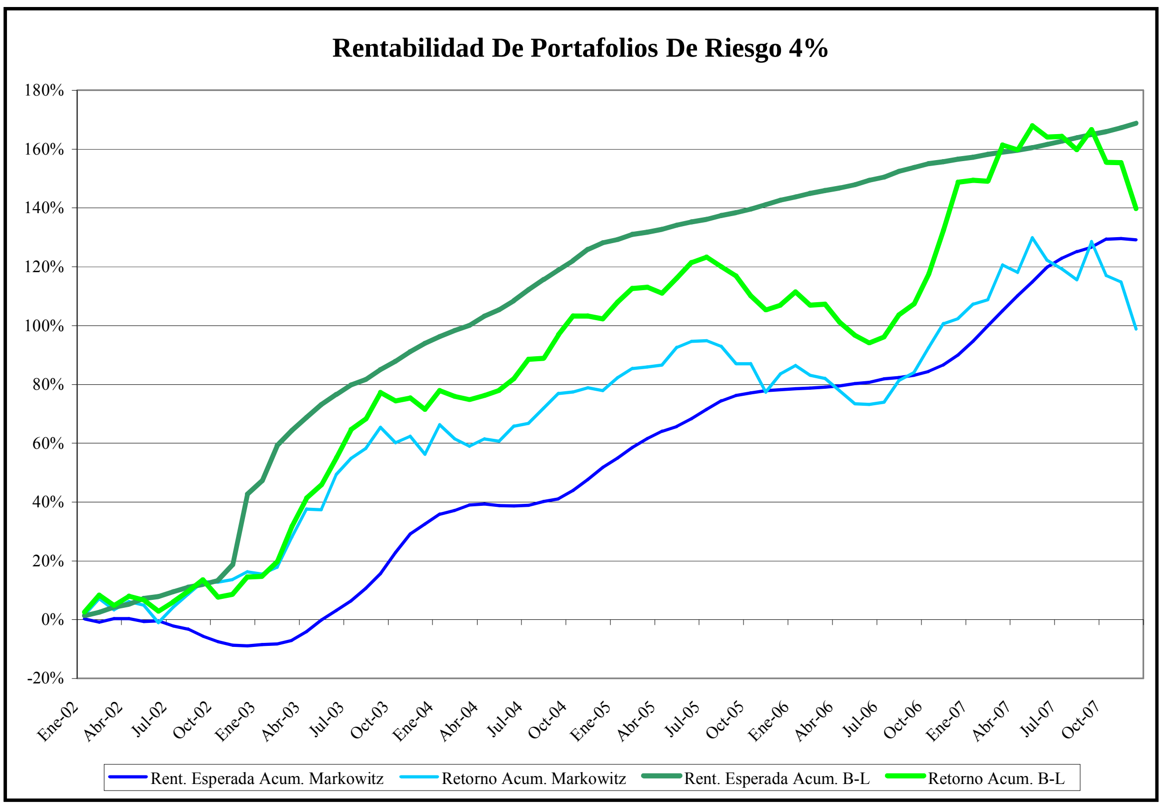

Gráfico 10: Evolución de los retornos acumulados según ambos modelos, para el portafolio de riesgo 4%, comparados con las rentabilidades esperadas.

Es claro que las rentabilidades esperadas presentan curvas bastante suaves, pero llama la atención que en el caso de Markowitz, lo esperado subestima lo efectivo, al contrario de Black-Litterman, en que los rendimientos esperados sobreestiman los retornos efectivos de los portafolios. No obstante, es claro que durante todo el período en análisis los retornos obtenidos por las asignaciones que sugiere Black-Litterman son superiores. Esto puede ratificarse en las diferencias entre los retornos efectivos al final del espacio de tiempo en estudio.

Tabla 14: Análisis de las series acumuladas de portafolios de riesgo 4%

	Markowitz	Black-Litterman
Rentabilidad Acumulada	129,2%	168,8%
Retorno Efectivo Acumulado	98,8%	139,8%
Error En La Predicción	-23%	-17%
Pendiente De Tendencia	0,016	0,023

El error de la predicción de B-L es menor, aúnque ambos estuvieron bajo las estimaciones. Por otro lado, se observa que la serie acumulada de Black-Litterman presenta una tendencia de pendiente superior.

4.2.3 Retornos De Los Portafolios de Riesgo 5%.

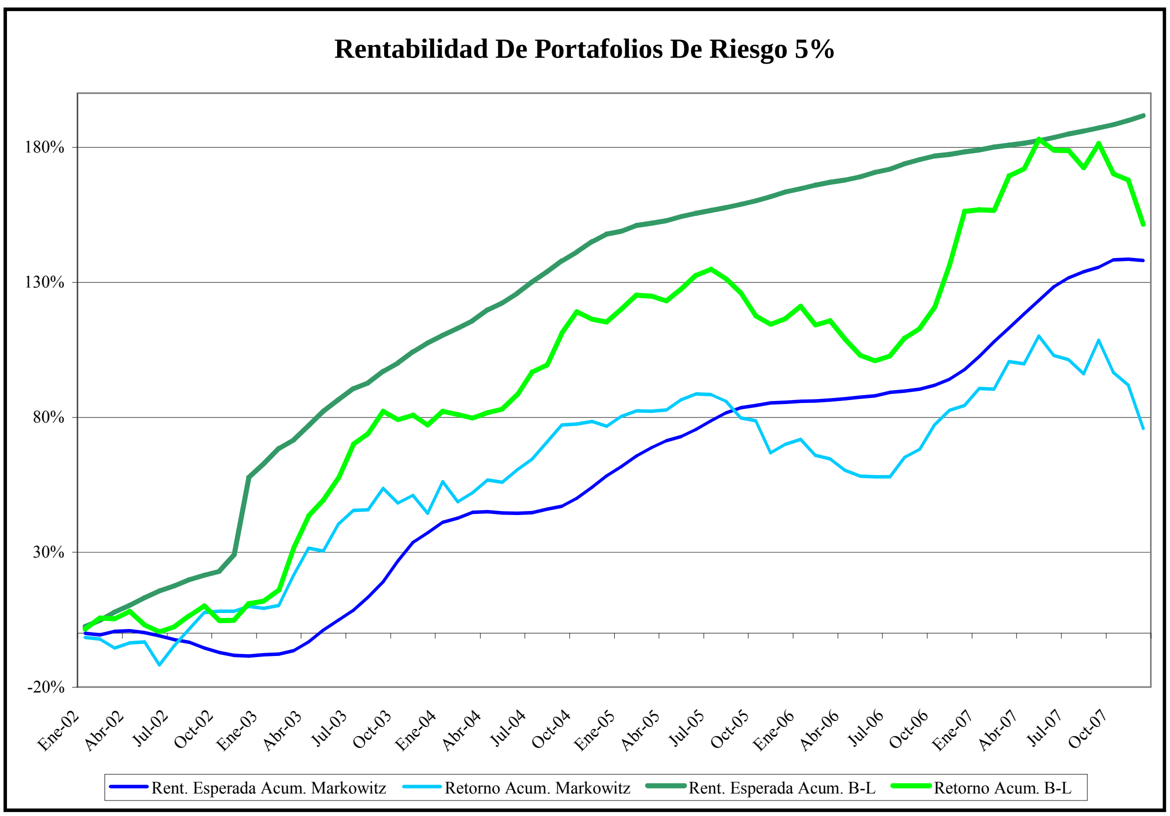

Gráfico 11: Evolución de los retornos acumulados según ambos modelos, para el portafolio de riesgo 5%, comparados con las rentabilidades esperadas.

Aparentemente las estimaciones de Markowitz son más apegadas a los retornos efectivos que el caso de Black-Litterman. Pero al final del espacio temporal, los valores acumulados presentan menos error, además de presentar retornos acumulados superiores permanentemente en el tiempo.

Tabla 15: Análisis de las series acumuladas de portafolios de riesgo 5%.

	Markowitz	Black-Litterman
Rentabilidad Acumulada	138,1%	191,8%
Retorno Efectivo Acumulado	75,7%	151,4%
Error En La Predicción	-45%	-21%
Pendiente De Tendencia	0,014	0,025

La superioridad de B-L en rentabilidades acumuladas podría suponerse constante, sin embargo, la diferencia de las pendientes en las líneas de tendencia muestran que esta superioridad es progresiva, es decir incrementaría en el tiempo.

De las gráficas anteriores, es posible encontrar un factor común: El modelo de Black-Litterman siempre entrega mejores retornos que el modelo de Markowitz, siendo esta diferencia directamente proporcional al nivel de riesgo asumido. Asimismo, el retorno acumulado al final del período en estudio es mayor en el caso en que se asume un riesgo mayor.

Se aprecia en cada gráfica que los comportamientos de los retornos son similares, eso se debe a que los períodos de alzas o bajas generalizadas actúan sobre todo el universo de activos en el mercado. Dicho de otra forma, un período de crisis afecta a todas las compañías, así mismo como los períodos de bonanza.

4.3 Capacidad Predictiva De Los Modelos.

Aún cuando ya se ha expuesto la superioridad del modelo de Black-Litterman sobre el de Markowitz en lo que a retornos efectivos se refiere, es necesario analizar cual es la relación entre los retornos esperados y la rentabilidad efectiva de los portafolios en estudio para cada modelo. Es decir cuán acertados son los modelos al momento de entregar rentabilidades esperadas.

Con este objetivo, se grafica la rentabilidad esperada versus el retorno efectivo de cada portafolio para los tres niveles de riesgo antes mencionados en todo el período de estudio.

4.3.1 Caso Portafolios De Mínima Varianza.

Se grafica cada portafolio de mínimo riesgo de ambos modelos (en verde B-L y en azul Markowitz), y los datos entregados son la rentabilidad esperada del portafolio y el retorno efectivo una vez transcurrido el periodo respectivo.

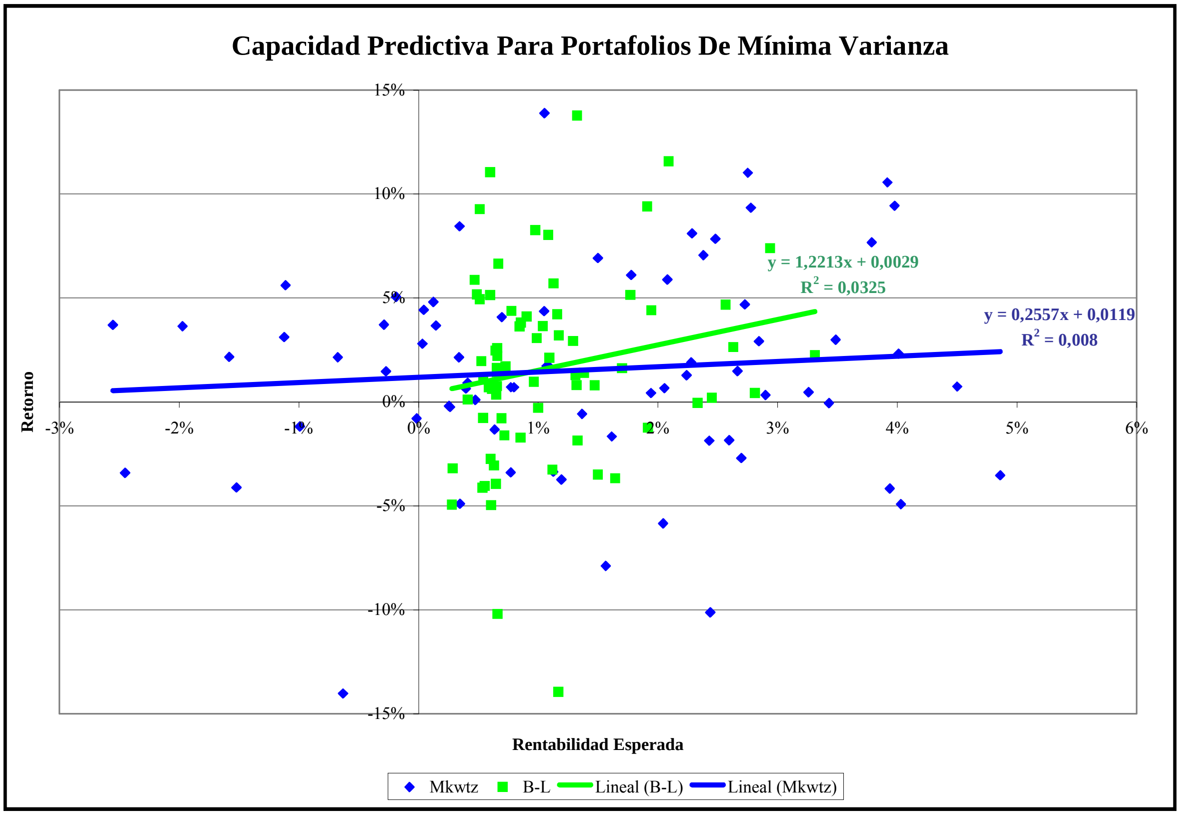

Gráfico 12: Rentabilidad Esperada v/s retorno efectivo de los portafolios de mínima varianza.

En primer lugar se observa que en ambos casos la nube de puntos es bastante dispersa. Sin embargo las correlaciones muestran que los datos son un poco más ajustados en el caso de los portafolios de Black-Litterman, mostrando una correlación de 3,3% versus el 0,8% de los portafolios de Markowitz.

Respecto a cuan predictivos resultan los modelos, una pendiente unitaria (o ángulo de 45°) mostraría ajuste perfecto. Con ese valor como referencia se compara las pendientes de las tendencias:

- Black-Litterman: m = 1,2213
- Markowitz: m = 0,2557

Estas pendientes muestran con claridad que, para el caso en estudio, la capacidad predictiva para los portafolios de mínima varianza es superior en el caso de las asignaciones de activos de Black-Litterman.

4.3.2 Caso Portafolios De Riesgo 4%

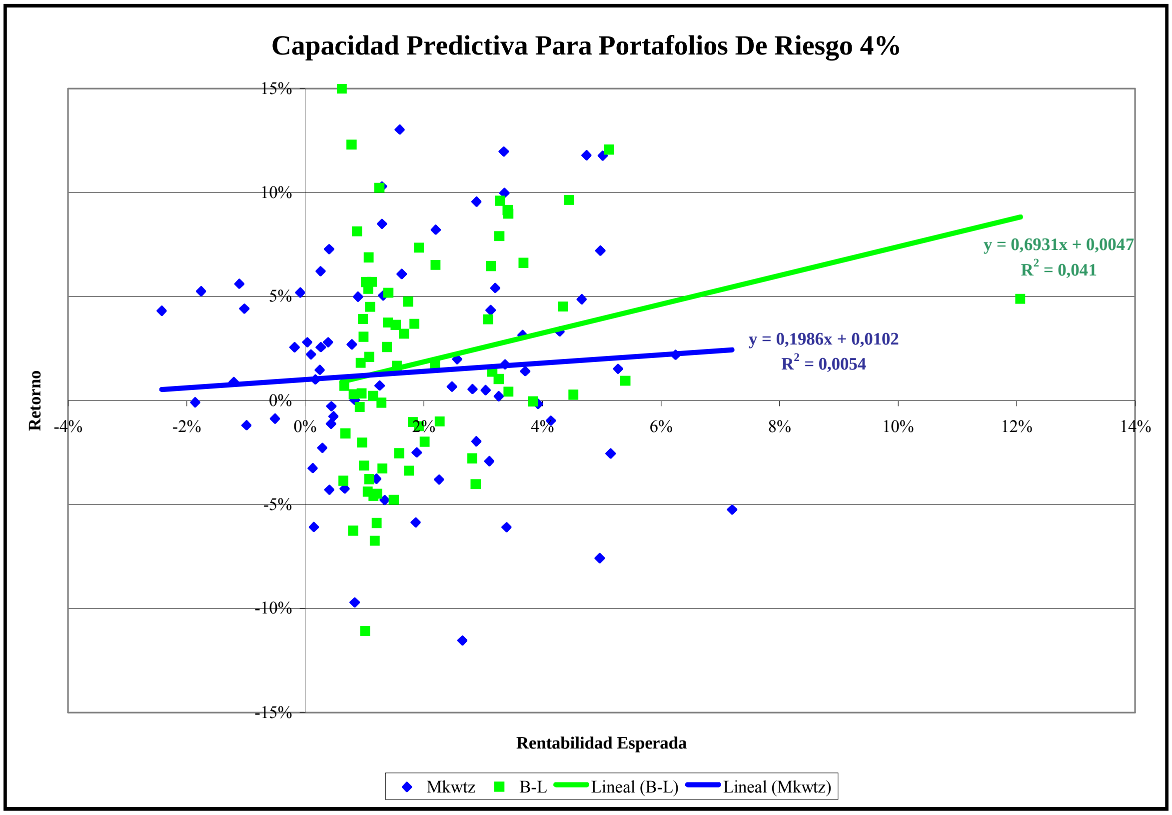

Gráfico 13: Rentabilidad Esperada v/s retorno efectivo de los portafolios de riesgo 4%.

La dispersión de los puntos parece ser menor en este caso, pero las correlaciones no muestran gran diferencia. Para los portafolios de B-L, el ajuste entre los datos aumenta a 4,1%; pero para Markowitz, disminuye a 0,5%.

La predicción de los modelos parece ser menor que en el caso de mínima varianza, dado que ambos se encuentran más alejados de la pendiente unitaria.

- Black-Litterman: m = 0,6931
- Markowitz: m = 0,1986

Sin embargo, se mantiene un mejor ajuste para las asignaciones de Black-Litterman, tal cual en el caso anterior.

4.3.3 Caso Portafolios De Riesgo 5%

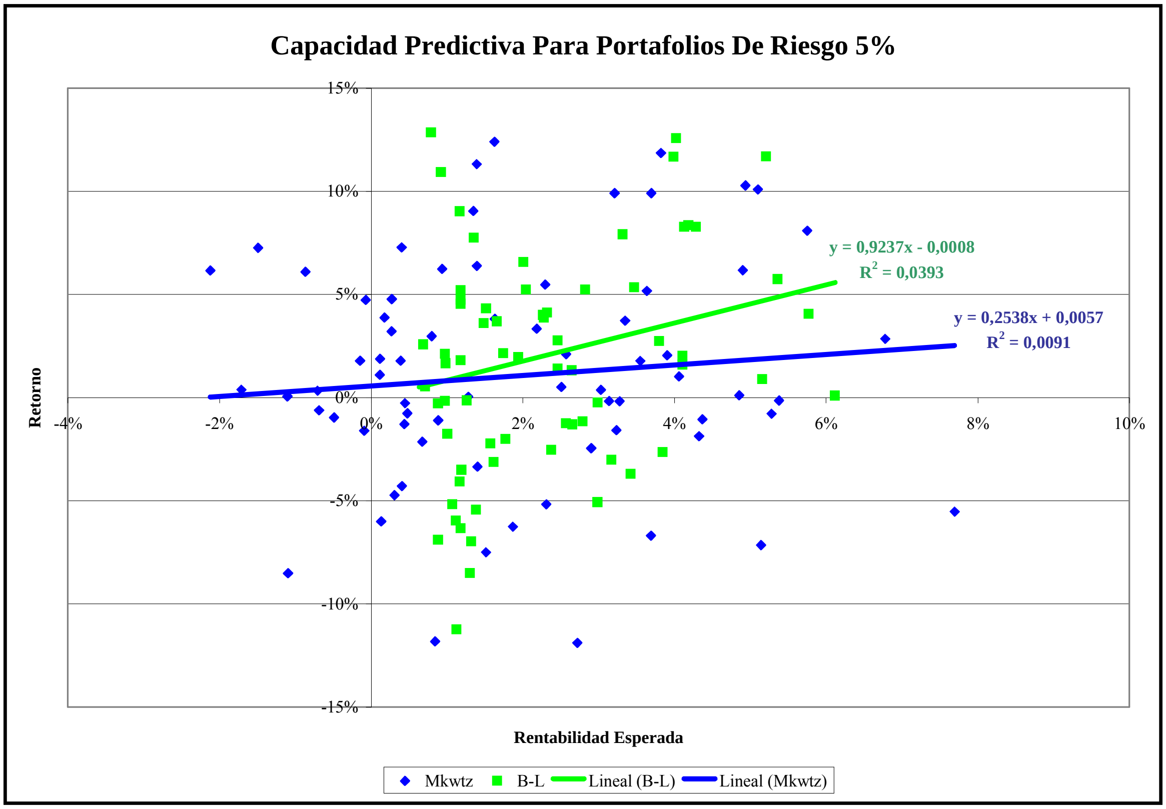

Gráfico 14: Rentabilidad Esperada v/s retorno efectivo de los portafolios de riesgo 5%.

En concordancia con los niveles de riesgo anterior, la nube de puntos no presenta mejores correlaciones, sus niveles de ajuste son 3,9% para B-L y 0,9% para Markowitz.

La predicción de los modelos mejora considerablemente para los portafolios de Black-Litterman, parece ser menor que en el caso de mínima varianza, dado que ambos se encuentran más alejados de la pendiente unitaria.

- Black-Litterman: m = 0,9237
- Markowitz: m = 0,2538

Para este nivel de riesgo, no sólo queda en evidencia que la correspondencia entre los rendimientos esperados y efectivos de Black-Litterman es mejor, sino que se observa una pendiente muy cercana a la unidad, implicando una alta relación o semejanza entre la predicción y lo efectivo. Pero no puede dejarse de lado la baja correlación de la nube de puntos, siendo tan sólo un 4%.

En resumen, se observa que para cada uno de los niveles de riesgo la pendiente de la línea de tendencia que arroja el modelo de Black-Litterman forma un ángulo más cercano a 45° que para el caso de Markowitz, lo que indica que los valores de la rentabilidad esperada se asemejan en mayor grado a la rentabilidad efectiva. En adición, las magnitudes del nivel de ajuste de los datos (correlación), aún cuando no se consideran satisfactorios ni representativos, son mejores para la modelación con Black-Litterman en los tres casos, lo que puede entenderse como tendencia.

4.4 Comparación Entre El Portafolio De Mínima Varianza De Black-Litterman Y Resultados De Mercado.

Una vez analizados los mejores resultados que puede entregar el modelo de Black-Litterman, resulta pertinente verificar el beneficio de implementar este modelo respecto a lo que sucede en el mercado nacional. Para lo anterior se utiliza como medida comparación los retornos acumulados del IPSA y del fondo A de una AFP, escogida al azar, para igual período de tiempo.

Las AFP's tienen restricciones sobre porcentajes de inversión en activos del mercado nacional e internacional. Paralelamente, cada fondo tiene restricciones sobre el nivel de riesgo que puede asumir, siendo el Fondo A el de mayor riesgo y es por este motivo que se selecciona para la presente comparación.

Con el objeto de comparar los rendimientos de las carteras en estudio con un portafolio con un alto nivel de rentabilidad, se considera el fondo A, concluyéndose que su rendimiento es inferior a los portafolios estudiados, de mínima varianza para ambos modelos. Esto se puede observar a continuación:

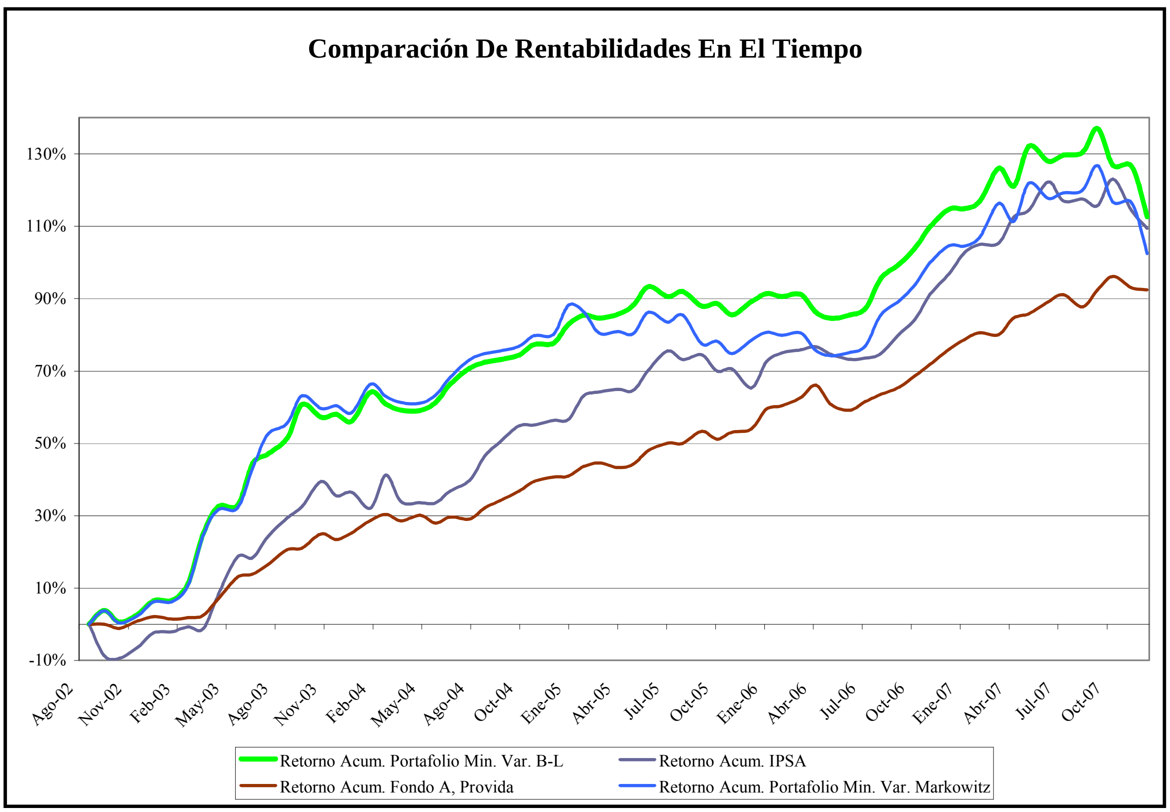

Gráfico 15: Comparación de rentabilidad del portafolio de mínimo riesgo, con el rendimiento del mercado nacional.

Se observa claramente que los rendimientos acumulados son superiores en el caso del modelo Black-Litterman, es decir mejor que el rendimiento que presenta el índice representativo del mercado bursátil nacional, y el que presenta el fondo más riesgoso de la AFP.

También se puede notar que la serie de los retornos de Markowitz decae hacia el final del periodo, al igual que las series estrictamente nacionales, pero lo hace incluso por debajo de los rendimientos del IPSA., no así la serie de Black-Litterman. Esto sugeriría que la inclusión de visiones de mercado permitiría soportar de mejor manera los períodos de crisis o bajos retornos.

5 Conclusiones Y Recomendaciones.

En primer lugar, se manifiesta el cumplimiento de los objetivos trazados para este trabajo. Los que se analizan a continuación:

- Objetivos Específicos:
    - <u>Comparar carteras eficientes de inversión, según los modelos de Markowitz y de Black-Litterman</u>.

    Los resultados de la simulación descrita muestran que los retornos obtenidos de los portafolios eficientes de Black-Litterman son superiores para los tres niveles de riesgo estudiados, en el caso estudiado. En la medida que el riesgo asumido al momento de realizar las asignaciones en los portafolios aumenta, también aumenta la diferencia de retornos obtenidos entre las series acumuladas de los modelos. Y aunque su comportamiento en general es bastante similar, el aumento de la diferencia entre series se debe al cambio en las pendientes de la línea de tendencia, en línea con el incremento del riesgo asumido.

    Los datos permiten observar que en la medida que el riesgo asumido aumenta, la pendiente de la tendencia que siguen los retornos acumulados de Markowitz es menor, mientras que en el caso de Black-Litterman, mayor.

    Sintetizando, Black-Litterman provee mejores rendimientos que Markowitz para los datos analizados, en distintos niveles de riesgo, en el periodo de tiempo estudiado. Los resultados se hacen más notorios en la medida que se está dispuesto a asumir mayor riesgo.

    - <u>Determinar el nivel de confianza de las especulaciones de cada agente involucrado.</u>

    En la medida que más recomendaciones emite cada agente, mayor será el tamaño muestral para determinar una probabilidad de acierto. Sin embargo, las corredoras de bolsa no cambian el estatus de la recomendación entre estudios, por lo que parece prudente considerar, para este cálculo, los informes o estudios por industria o empresa, y no los reportes periódicos que presentan públicamente. Se observa, de la simulación, que los estudios que involucran precio objetivo a un plazo determinado entregan mejores estimaciones de rentabilidades esperadas.

    Respecto al evento al que se asigna la probabilidad, se puede complejizar tanto como se quiera. Para este estudio se consideró la probabilidad de acierto y error para cada tipo de recomendación (compra fuerte, comprar, mantener, reducir), por agente emisor y con una muestra de entre uno y dos años de recomendaciones. Para los casos en que no existen recomendaciones previas en alguna de las categorías, se otorga el "beneficio de la duda", es decir se asigna probabilidad de 50% hasta que transcurre tiempo suficiente para poder evaluar las primeras recomendaciones.

Sin perjuicio de lo anterior, es bastante lógico pensar que dentro de los agente emisores de recomendaciones existen analistas determinados para cada empresa o industria, y que la calidad del estudio depende directamente de quien lo elabora. Por tanto, además de los ítems considerados para la simulación, también podrían considerarse las probabilidades por analista específico, por empresa o por industria, obteniendo una muestra mucho más reducida para el cálculo de probabilidades, pero mucho más precisa.

- Encontrar cómo transcribir matemáticamente las recomendaciones bursátiles.

Las recomendaciones vienen, generalmente, con estatus de compra, venta o mantención, en algunos casos con precio objetivo y, en una cantidad muy menor, con plazo para dicho precio. En el caso de las recomendaciones con precio objetivo es bastante más neutral la sugerencia, dado que permite al inversionista observar una rentabilidad esperada absoluta y decidir sobre la misma; la ausencia de un precio objetivo relativiza la sugerencia, ya que se emiten en función de los movimientos del IPSA (en el caso local), por lo que puede darse a lugar una recomendación de compra, cuando se espera que una acción rente al menos un 5% por sobre el rendimiento del IPSA, pero esto no es absoluto, por lo que el IPSA podría sufrir una caída de 15% en el período y por consiguiente la acción presentaría una baja de 10%, y aún sería correcta la recomendación de comprar.

No obstante lo anterior, lo relevante de este punto es que cualquier recomendación o especulación que se capte del ambiente financiero puede escribirse de modo tal que pueda incluirse en el modelo de Black-Litterman. Si sólo trae el estatus recomendado, el retorno esperado para el próximo periodo será el resultante de la adición entre la recomendación respectiva y la rentabilidad esperada del IPSA. Esta última puede obtenerse fácilmente de la prensa, que publica periódicamente especulaciones para este índice, o bien puede extrapolarse el rendimiento que ha tenido en los últimos períodos.

Para más de una recomendación sobre el mismo activo, la rentabilidad esperada será el promedio de las rentabilidades propuestas, ponderadas por el nivel de confianza de cada agente emisor.

Respecto al nivel de certeza de la recomendación, durante la implementación del modelo de Black-Litterman se presentó dos formas de expresar las incertezas sobre las visiones, una sugerida por los autores: $\Omega = Diag(P \cdot \tau\Sigma \cdot P')$ y otra sugerida en diversos documentos que critican el funcionamiento del modelo, que corresponde a la desviación estándar sobre las rentabilidades esperadas de las recomendaciones. Durante la simulación, se probaron ambos métodos, presentando ciertos temores sobre los resultados del criterio de la desviación estándar en el caso que existe sólo una recomendación, ya que eso implicaría tener fé ciega en la recomendación. Se constató que ninguno de los métodos era suficientemente satisfactorio por si sólo, por lo que se probó una combinación de ambos, en que a las visiones compuestas de una recomendación se les asignó un valor de incerteza $\Omega_i = P_i \cdot \tau\Sigma \cdot P_i'$ y a las visiones formadas por más de una recomendación se le asignó un valor de incerteza correspondiente a la mencionada desviación estándar. Éste método resultó entregar mejores aproximaciones de las rentabilidades esperadas, y por tanto retornos efectivos mucho más cercanos a los esperados previo al período de inversión

- Analizar el nivel de aplicabilidad de los modelos en casos reales.

El proceso de simulación de ambos modelos muestra la factibilidad de la aplicación, debido a que se utilizaron activos nacionales que se transan en bolsa. Como este modelo no restringe el tipo de activos a utilizar, es aún más factible aplicarlo en la realidad, puesto que puede utilizarse sobre fondos mutuos, monedas, futuros, u otros instrumentos; además de la inclusión de activos libres de riesgo. El principal problema podría deberse a la reunión de recomendaciones y la asignación de una probabilidad de acierto sobre ellas. Un punto que no se puede ignorar es que para aplicar este modelo se requiere almacenar grandes cantidades de información (para las probabilidades de acierto), reunir las recomendaciones y especulaciones que rondan en el ambiente financiero y por tanto requiere tiempo y disposición.

También es relevante mencionar que la simulación no considera ningún tipo de costo de transacción. Éstos con toda seguridad disminuyen la rentabilidad resultante, sin embargo este efecto recae sobre ambos modelos, por lo que no influye en la comparación, y puede verse disminuido alargando los períodos entre asignaciones.

- Determinar si es posible construir ambos modelos con información pública.

Afortunadamente toda la información requerida es pública, sin embargo puede presentar problemas de accesibilidad. Para conseguir los precios de cierre mensual anteriores a tres meses es necesario ir a la Bolsa de Comercio de Santiago y tomarlos a manualmente de un Terminal de Zebra[9], a menos que se tenga a disposición un Terminal Bloomberg. También es posible encontrar algunos de estos datos en portales de inversión como Invertia o Yahoo! Finance, pero la antigüedad de estos datos no es superior a seis meses. Si los activos en que se desea invertir son de otro tipo, es altamente probable que la información esté disponible, dado que en la mayoría de los casos es pública, pero el problema se presenta al intentar acceder a ella. Respecto a las recomendaciones, existen varios agentes que las publican gratuitamente en su portal de inversiones, otros solicitan hacerse cliente de la corredora en cuestión, proceso que no tiene costo alguno. Por último, especulaciones de mercado se encuentran en la prensa diariamente, basta con organizar la información que se recoge para estimar la probabilidad de acierto de la mejor manera posible.

Además del análisis de cada objetivo específico, existen algunos puntos relevantes sobre los cuales se quisiera hacer mención.

Ya se hizo referencia a como la pendiente de la tendencia de los retornos acumulados de Markowitz disminuye a mayor riesgo, al mismo tiempo que la misma pendiente sería directamente proporcional al riesgo asumido en el modelo de Black-Litterman, en el caso particular de los datos analizados. Esto permite inferir que en la medida que más riesgo se desee asumir más conveniente sería implementar el modelo de Black-Litterman. Por el contrario, si se trata de un inversionista absolutamente adverso al riesgo, tal vez sería conveniente implementar el modelo de Markowitz, considerando la simplicidad de su metodología, versus la complejidad de aplicar B-L.

[9] Sistema computacional con que opera la Bolsa de Comercio de Santiago.

Es posible observar, a partir de la comparación de los datos con el mercado, que el modelo de Black-Litterman presenta un mejor resguardo ante episodios de adversidades económicas, ya que los últimos meses en estudio corresponden a períodos mundialmente negativos, financieramente hablando, donde las principales bolsas de comercio mundiales presentaron resultados a la baja, y por supuesto entre ellos la Bolsa de Comercio de Santiago. Si se observa las series en estudio, es posible encontrar que los retornos de Markowitz finalizan incluso por debajo de los rendimientos que presenta el indicador IPSA, no así la serie de Black-Litterman, para el caso de las series de asignaciones de activos que representan el mínimo riesgo. Respecto a la serie del Fondo A de AFP Provida, ésta es la de mayor riesgo dentro de sus multifondos, pero es la que menos renta de todas las series que se han comparado, la explicación se encuentra en que tiene restricciones provenientes de la superintendencia de AFP's sobre porcentajes a invertir en renta variable y renta fija, además de que se les permite invertir en activos internacionales, por tanto puede tener carteras más diversificadas, es decir asumen menor riesgo, y eso se refleja en que sus resultados son inferiores.

Respecto al período histórico que se ha analizado es cierto que el período estudiado es período estudiado es particularmente positivo, por lo que podría suponerse que esto tiene alguna implicancia en el modelo estudiado, sin embargo este efecto afecta de la misma manera para los demás casos con los que se ha contrastado, tanto para las asignaciones de Markowitz como para los retornos del IPSA y del fondo A de la AFP escogida.

En lo que se refiere al parámetro τ, hay muchas interpretaciones en la literatura, varias de ellas discrepantes. Mientras los autores del modelo postulan que este valor debiese tomar valores cercanos a cero, en documentos referentes al modelo, autores como Idzorek, T. (*A Step-By-Step Guide To The Black-Litterman Model*, 2004) o Jiang, B., Panda, T., Lin, J., Zhang, Y. (*Black-Litterman Asset Allocation Model*, 2005) sugieren que τ debiera tomar valores cercanos a la unidad. Esto último se justifica como que, aunque la principal característica del modelo es la capacidad de involucrar visiones del mercado, no puede dejarse en segundo plano como covarían los activos entre sí. Dados estos razonamientos resulta natural pensar en este parámetro como un valor que balancea la influencia de la historia de los activos versus la visión de futuro sobre los mismos. Entonces, si el inversionista da mayor credibilidad a la interacción histórica de los activos, sin querer despreciar la especulación que existe en el ambiente financiero, podría optar por valores para τ cercanos a uno, 0,95 por ejemplo. Opuestamente, si el inversionista opina que independiente de lo que ha sucedido históricamente, el comportamiento del mercado tenderá a seguir las recomendaciones, o bien los estudios sobre el mismo son suficientemente exactos como para adelantarse a los sucesos, el valor de τ que adoptará será muy cercano a cero, 0,1 por ejemplo.

En lo que respecta a este trabajo, uno de los objetivos es mostrar la influencia que tienen las visiones de mercado en los retornos efectivos *a posteriori*, por lo que se adoptó un valor de τ igual a 0,01 para la simulación, que además corresponde al planteado por Black y Litterman en su publicación *Global Portfolio Optimization*.

Una vez analizados aspectos específicos de los modelos, se estudia el objetivo principal de este trabajo.

- Objetivo General:
  <u>Analizar el costo beneficio de la implementación del modelo de Black-Litterman en portafolios de inversión.</u>

  Inicialmente ha de comentarse el costo de la implementación, relativo al costo involucrado de la implementación del Modelo de Markowitz. En este sentido, la metodología de Markowitz es bastante sencilla, y no requiere grandes esfuerzos. Para obtener las rentabilidades esperadas por CAPM, los betas están disponibles en el portal de Bloomberg, dato que podría representar mayor complejidad. La dificultad de obtener los datos históricos y sus covarianzas no será considerada, dado que es común para ambos modelos.

  Para implementar el modelo de Black-Litterman se presenta la complejidad adicional referente a las visiones. Reunirlas y clasificarlas no es algo que represente dificultad, pero si exige rigurosidad y tiempo, ya que para obtener valores lo más acertado posible, es necesario tener una muestra amplia de recomendaciones, recogerlas periódicamente y revisar las anteriores para poder clasificarlas como acertadas o erróneas. Además de eso, se requiere seleccionar las pertinentes al universo de inversión en consideración y posteriormente diagramarlas de manera matricial. Nada de esto representa alguna dificultad, pero estará a criterio del inversionista definir si el costo de oportunidad de su tiempo es superior o inferior al requerido para llevar a cabo el modelo con éxito.

  Durante este trabajo se ha mostrado cuan positivos pueden ser los resultados si se emplea rigurosidad, luego queda en manos del usuario el costo que representa mantener un modelo así de detallado.

  Por último es importante destacar que los resultados obtenidos y las conclusiones que se han generado, sólo son válidos para los activos considerados en el período en cuestión. Es decir, esto es un caso particular de la aplicación de cada modelo y no representa la generalidad de los casos. Por tanto, no deben considerarse las conclusiones de este análisis como valederas para cualquier universo de activos que se quiera considerar.

6 Bibliografía.

- BAGASHEVA, B., FABOZZI, F., HSU, J., RACHEV, S. *Bayesian Applications to the Investment Management Process.* [En línea] <http://www.pstat.ucsb.edu/research/papers/BagashevaRachevHsuFabozzi_BayesianApplications.pdf> [Consulta: 07 Julio 2008].

- BLACK, F., LITTERMAN, R. *Global Asset Allocation With Equities, Bonds, and Currencies*. [En línea] *Goldman Sachs Investment Management*. Octubre 1991. <http://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA453_2006/Black_Litterman_GAA_1991.pdf> [Consulta: 01 Abril 2008].

- BLACK, F., LITTERMAN, R. *Global Portfolio Optimization*. [En línea] *Financial Analysts Journal*; Septiembre/Octubre 1992; 48, 5; ABI/INFORM Global pg. 28. <http://www.mat.uc.pt/~lnv/of/black-litterman.pdf> [Consulta: 01 Abril 2008].

- CASS, J., CHRISTODOULAKIS, G., Bayesian *Optimal Portfolio Selection: the Black-Litterman Approach*. [En línea] *MSc Mathematical Trading and Finance*. Noviembre 2002. <http://www.globalriskguard.com/resources/assetman/bayes_0008.pdf> [Consulta: 01 Abril 2008].

- HE, G. y LITTERMAN R. *The Intuition Behind Black-Litterman Model Portfolios*. [En línea] *Goldman Sachs Investment Management*. Diciembre 1999. <http://web.econ.unito.it/nicodano/litterman_the_intuition_behind_black_litterman.pdf> [Consulta: 01 Abril 2008].

- IDZOREK, T. *A Step-By-Step Guide To The Black-Litterman Model*. [En línea] *Zephyr Associates, Inc*. 20 Julio 2004. <http://www.mccombs.utexas.edu/faculty/keith.brown/ChileMaterial/Idzorek%20WP.pdf> [Consulta: 01 Abril 2008].

- JIANG, B., PANDA, T., LIN, J., ZHANG, Y. *Black-Litterman Asset Allocation Model*. [En línea] <http://faculty.fuqua.duke.edu/~charvey/Teaching/BA491_2005/MG/MG.ppt> [Consulta: 01 Abril 2008].

- LAKER, D. *Fundamentals of Performance Attribution: The Brinson Model. Barra Inc*. 2002. pp 2, 3.

- LASA, A.J. Construcción De Una "Frontera Eficiente" De Activos Financieros En México. [En línea] <http://www.geocities.com/Athens/Parthenon/4400/varios/repfin.pdf> [Consulta: 01 Abril 2008].

- MANKERT, C. *The Black-Litterman Model - mathematical and behavioral finance approaches towards its use in practice.* [En línea]. *Royal Institute of Technology,* Estocolmo, Suecia. <http://www.optimatika.se/pdf/bl_thesis_en.pdf > [Consulta: 07 Julio, 2008].

- WALTERS, J. *The BlackLitterman Model: A Detailed Exploration.* [En línea] <http://www.blacklitterman.org/Black-Litterman.pdf > [Consulta: 7 Abril, 2008].

7 Anexos

7.1 Teorema De Bayes.

El Teorema de Bayes proporciona la distribución de probabilidad condicional de un evento "A" dado otro evento "B" (probabilidad posteriori), en función de la distribución de probabilidad condicional del evento "B" dado "A" y de la distribución de probabilidad marginal del evento "A" (probabilidad simple o apriori).

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

7.2 Resolución Típica Del Problema De Optimización.

El problema de optimización planteado para la asignación de activos en portafolios de inversión, es el siguiente:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \sigma^2(r_p) = w^T \cdot \Sigma \cdot w \\
&\text{Sujeto a:} \\
&E(r_p) = w^T \cdot E(r_i) \\
&\vec{1} \cdot w = 1 \\
&w_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n.
\end{aligned}$$

Se muestra la resolución de este problema para el caso particular planteado en la sección 3.1.

$$\text{Función Objetivo: } \sigma^2(r_p) = w^T \cdot \Sigma \cdot w = \begin{bmatrix} w_A & w_B & w_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0{,}0025 & 0{,}0007 & 0{,}0002 \\ 0{,}0007 & 0{,}0031 & -0{,}0002 \\ 0{,}0002 & -0{,}0002 & 0{,}0076 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_A \\ w_B \\ w_C \end{bmatrix}$$

Desarrollando, se tiene:

$$\text{Min } \sigma^2(r_p) = 0{,}0025 w_A^2 + 0{,}0031 w_B^2 + 0{,}0076 w_C^2 + 0{,}0014 w_A w_B + 0{,}0004 w_A w_C - 0{,}0004 w_B w_C$$

Sujeto a:

$$E(r_p) = \begin{bmatrix} w_A & w_B & w_C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6{,}7\% \\ 7{,}14\% \\ 7{,}2\% \end{bmatrix} = 0{,}067 \cdot w_A + 0{,}0714 \cdot w_B + 0{,}072 \cdot w_C$$

$$\begin{aligned}
&w_A + w_B + w_C = 1 \\
&w_A \geq 0 \\
&w_B \geq 0 \\
&w_C \geq 0
\end{aligned}$$

Para resolver este problema, se escribe el Lagrangeano y posteriormente se establecen las condiciones de primer orden.

$$L = 0{,}0025w_A^{\ 2} + 0{,}0031w_B^{\ 2} + 0{,}0076w_C^{\ 2} + 0{,}0014w_A w_B + 0{,}0004w_A w_C - 0{,}0004w_B w_C$$
$$+ \lambda\left(E(r_p) - 0{,}067 \cdot w_A - 0{,}0714 \cdot w_B - 0{,}072 \cdot w_C\right) + \gamma\left(w_A + w_B + w_C - 1\right)$$

CPO's:

$$\frac{\partial L}{\partial w_A} = 0{,}005w_A + 0{,}0014w_B + 0{,}0004w_C - 0{,}067\lambda + \gamma = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_B} = 0{,}0062w_{\mathbf{B}} + 0{,}0014w_A - 0{,}0004w_C - 0{,}0714\lambda + \gamma = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial w_C} = 0{,}0152w_C + 0{,}0004w_A - 0{,}0004w_B - 0{,}072\lambda + \gamma = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = E(r_p) - 0{,}067w_A - 0{,}0714w_B - 0{,}072w_C = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \gamma} = +w_A + w_B + w_C - 1 = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, se tiene las cinco incógnitas en función del retorno esperado del portafolio:

$$w_A = -218{,}3509 \cdot E(r_p) + 15{,}6322$$
$$w_B = 152{,}9242 \cdot E(r_p) - 10{,}2686$$
$$w_C = 65{,}4267 \cdot E(r_p) - 4{,}3637$$
$$\lambda = 337{,}0690 \cdot E(r_p) - 23{,}4374$$
$$\gamma = 23{,}4374 \cdot E(r_p) - 1{,}6325$$

Y reemplazando en la función objetivo:

$$\sigma^2(r_p) = 168{,}5345 \cdot E(r_p)^2 - 23{,}4374 \cdot E(r_p) + 0{,}8163$$

Ecuación que corresponde a la frontera eficiente riesgo-retorno para el universo de activos descritos.

7.3 Comparación De Carteras Riesgosas Al 5%.

Datos: 2 años. Rentabilidad Esperada: CAPM

Sociedad	Peso Relativo	Retorno Esperado	Retorno Efectivo
ANDINA-B	0%	2,84%	-13,62%
BSANTANDER	87,3%	3,11%	-11,43%
CAP	12,7%	3,15%	-7,78%
Portafolio	**100%**	**3,11%**	**-10,96%**

Datos: 1 año. Rentabilidad Esperada: CAPM

Sociedad	Peso Relativo	Retorno Esperado	Retorno Efectivo
ANDINA-B	0%	2,84%	-13,62%
BSANTANDER	55,3%	3,11%	-11,43%
CAP	44,7%	3,15%	-7,78%
Portafolio	**100%**	**3,13%**	**-9,80%**

Datos: 1 año. Rentabilidad Esperada: Retorno del último período

Sociedad	Peso Relativo	Retorno Esperado	Retorno Efectivo
ANDINA-B	0%	-3,72%	-13,62%
BSANTANDER	55,4%	2,83%	-11,43%
CAP	44,6%	16,87%	-7,78%
Portafolio	**100%**	**9,09%**	**-9,80%**

Datos: 1 año. Rentabilidad Esperada: Retorno promedio último año.

Sociedad	Peso Relativo	Retorno Esperado	Retorno Efectivo
ANDINA-B	30,5%	1,90%	-13,62%
BSANTANDER	28,1%	0,63%	-11,43%
CAP	41,4%	7,35%	-7,78%
Portafolio	**100%**	**3,80%**	**-10,59%**

7.4 Activos Involucrados En La Simulación Y Su Capitalización De Mercado.

Tabla 16: Sociedades anónimas abiertas con presencia bursátil superior a 90%.

Sociedad	Peso Relativo IPSA	Presencia Bursátil
ANDINA-B	1,92	100,00%
BSANTANDER	1,52	100,00%
CAP	3,95	100,00%
CCU	2,35	100,00%
CHILE	1,12	100,00%
CMPC	1,67	100,00%
COLBUN	4,70	100,00%
CONCHATORO	0,89	100,00%
COPEC	5,47	100,00%
CTC-A	3,09	100,00%
D&S	5,96	100,00%
EDELNOR	0,44	100,00%
ENDESA	6,95	100,00%
ENERSIS	9,20	100,00%
ENTEL	2,62	100,00%
FALABELLA	2,88	100,00%
LAN	6,65	100,00%
SQM-B	6,05	100,00%
VAPORES	2,32	100,00%

7.5 Validación De Betas Utilizados Para La Simulación.

Tabla 17: Comparación de Betas a Diciembre de 2007.

	Beta	Beta Ajustado	Bloomberg	Economática
ANDINA-B	0,68	0,79	0,77	0,85
BSANTANDER	0,90	0,94	0,93	0,51
CAP	1,04	1,03	1,05	1,61
CCU	0,94	0,96	0,97	0,87
CHILE	0,66	0,77	0,77	0,54
CMPC	0,98	0,99	0,96	0,71
COLBUN	0,61	0,74	0,80	1,08
CONCHATORO	0,97	0,98	0,99	1,27
COPEC	0,96	0,97	0,96	0,62
CTC-A	1,08	1,05	1,03	1,23
D&S	1,06	1,04	1,03	1,38
EDELNOR	0,73	0,82	0,93	1,65
ENDESA	1,06	1,04	1,05	1,11
ENERSIS	1,11	1,07	1,10	1,2
ENTEL	0,99	1,00	1,04	0,91
FALABELLA	1,18	1,12	1,13	1,14
LAN	1,18	1,12	1,13	1,26
SQM-B	1,05	1,03	1,04	0,96
VAPORES	1,34	1,23	1,26	1,62

Se aprecia que los valores obtenidos a diciembre de 2007 son bastante similares a los publicados por Bloomberg y Economática. Además, presentan diferencias a los publicados de 3,7% y 34,1% respectivamente. Por otro lado, se presenta la gráfica sobre la correlación existente con ambas publicaciones.

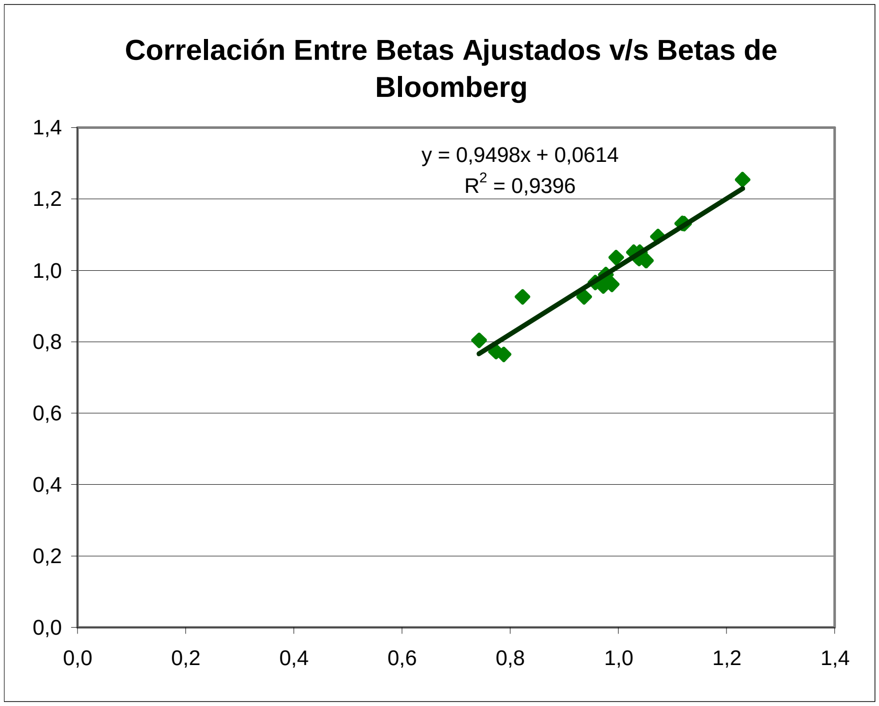

Gráfico 16: Correlación entre los betas ajustados calculados y los betas entregados por Bloomberg a Diciembre 2007.

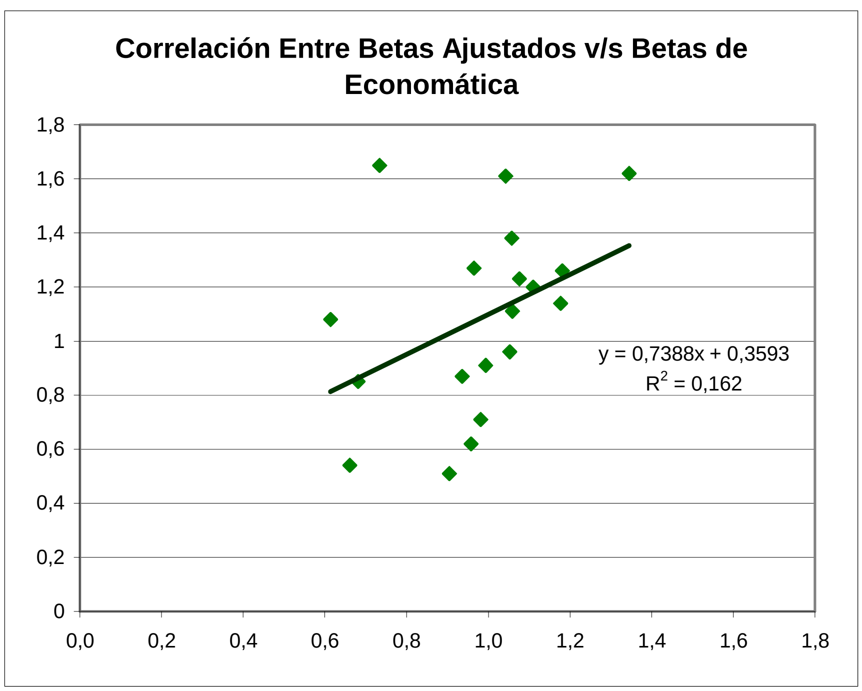

Gráfico 17: Correlación entre los betas ajustados calculados y los betas entregados por Economática a Diciembre 2007.

La gráfica muestra la gran correlación que existe entre los distintos betas, siendo mayor la diferencia mostrada por Economática, con una desviación estándar de las desviaciones de 34,1%. Sin embargo estas diferencias también las presenta respecto a los datos de Bloomberg. Esto valida la utilización de los betas calculados en este trabajo.

7.6 Fronteras Eficientes De Inversión Para Los Años En Estudio.

A continuación se presentan algunos periodos de comparación de fronteras eficientes de inversión. En cada gráfico es posible observar las fronteras de Black-Litterman y Markowitz, asimismo como las relaciones de riesgo-retorno esperado para cada uno de los activos, según la modelación de CAPM y Black-Litterman. Por último se presentan los retornos efectivos de los portafolios sugeridos por Markowitz y Black-Litterman, para niveles de riesgo mínimo, 4% y 5%.

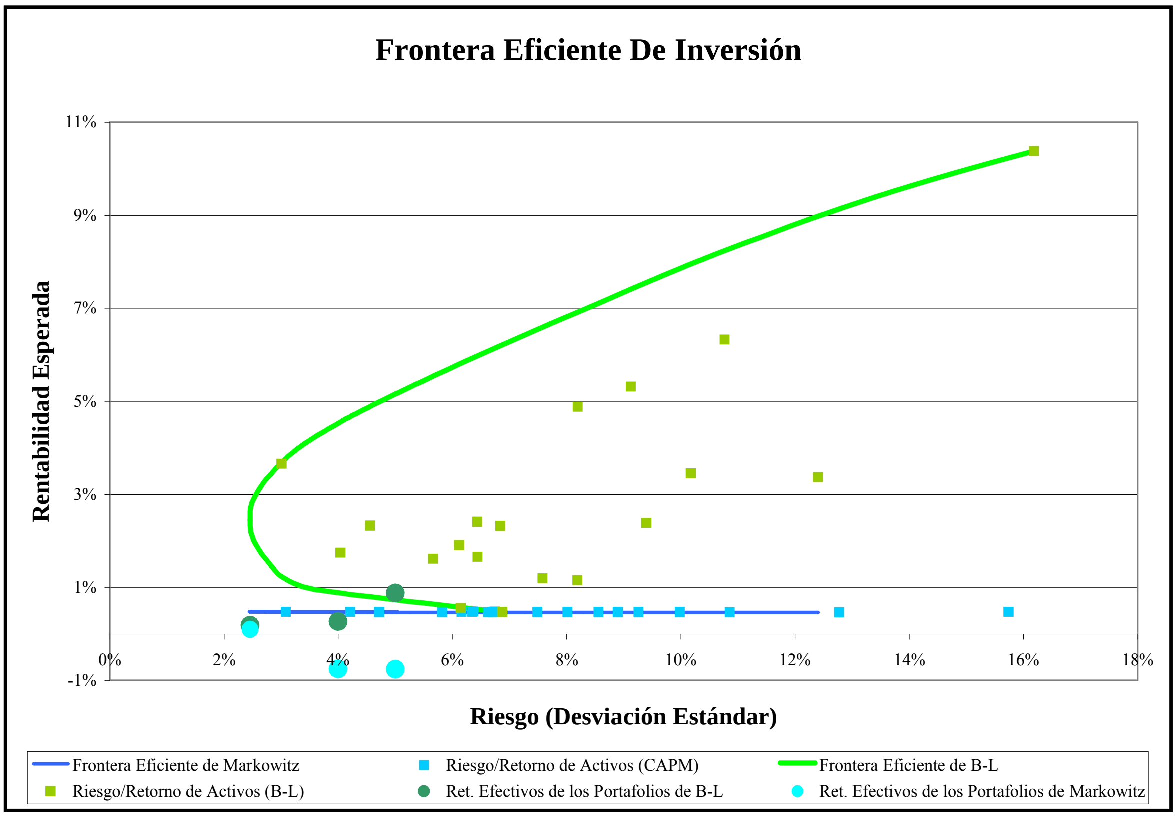

Gráfico 18: Fronteras Eficiente de Inversión, al 31 de Enero, 2003.

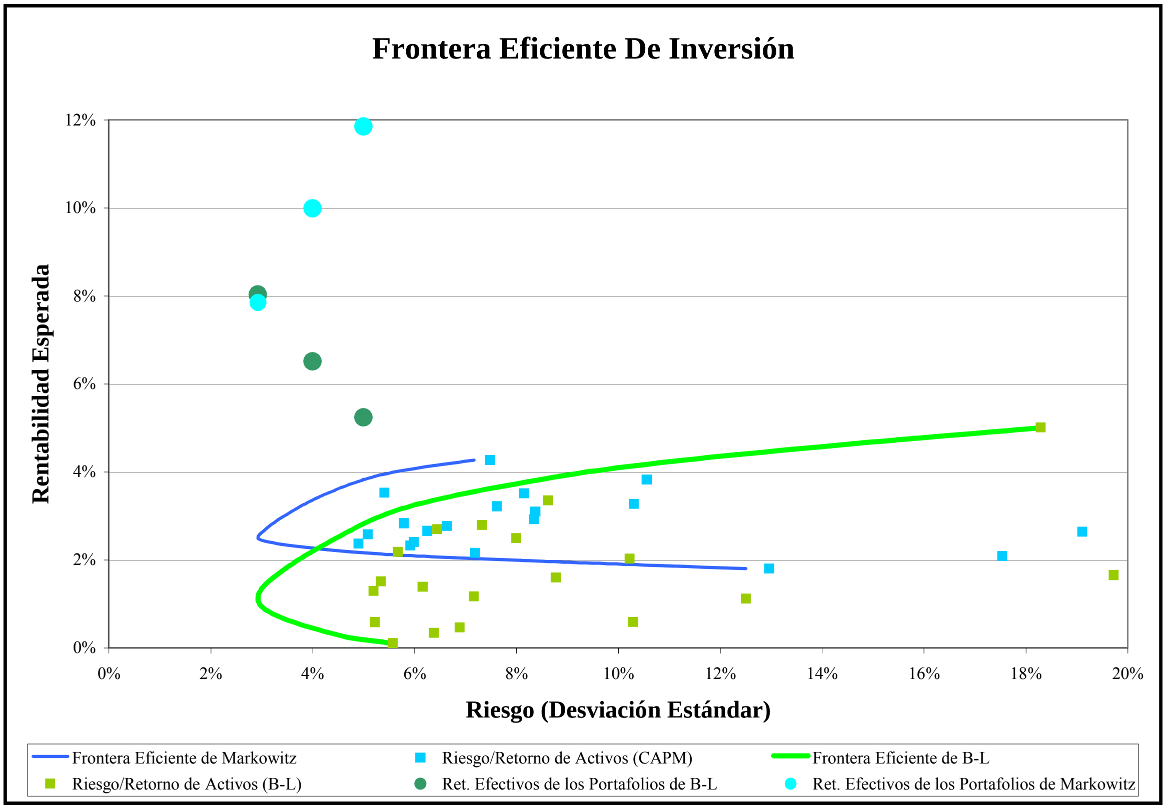

Gráfico 19: Fronteras Eficiente de Inversión, al 30 de Enero, 2004.

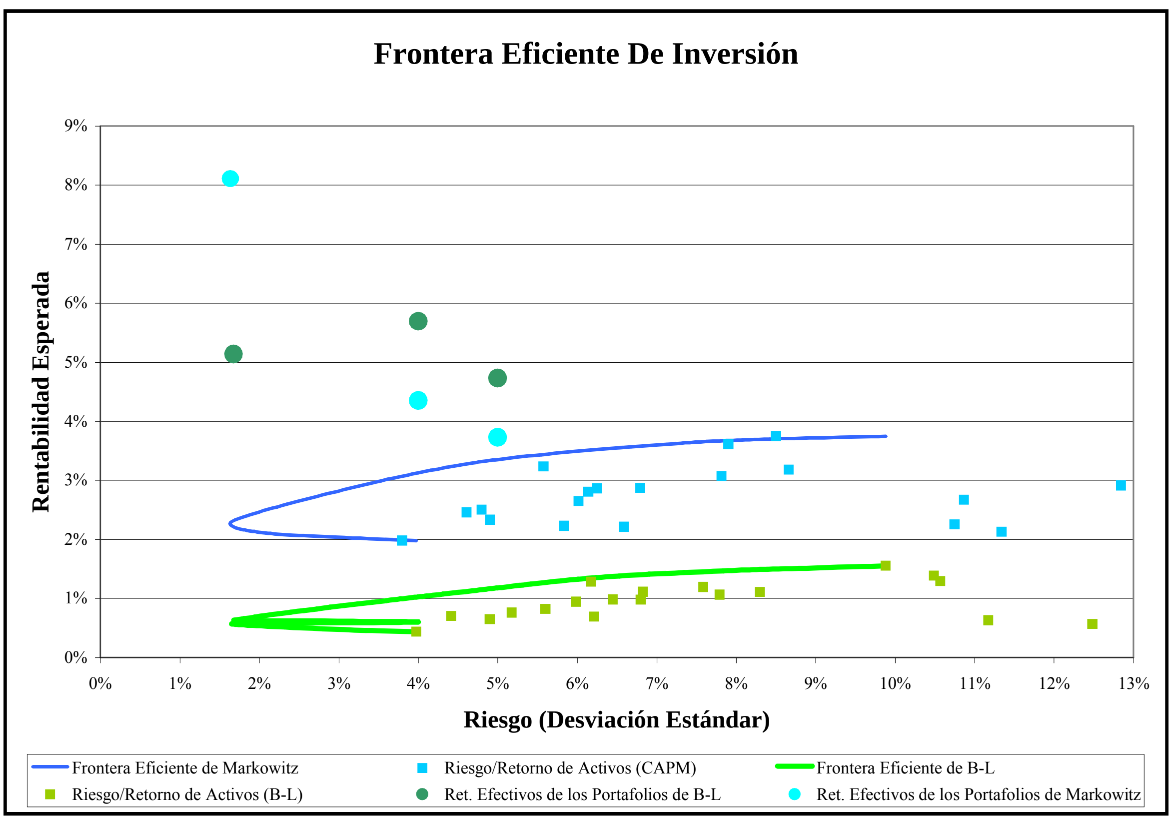

Gráfico 20: Fronteras Eficiente de Inversión, al 28 de Enero, 2005.

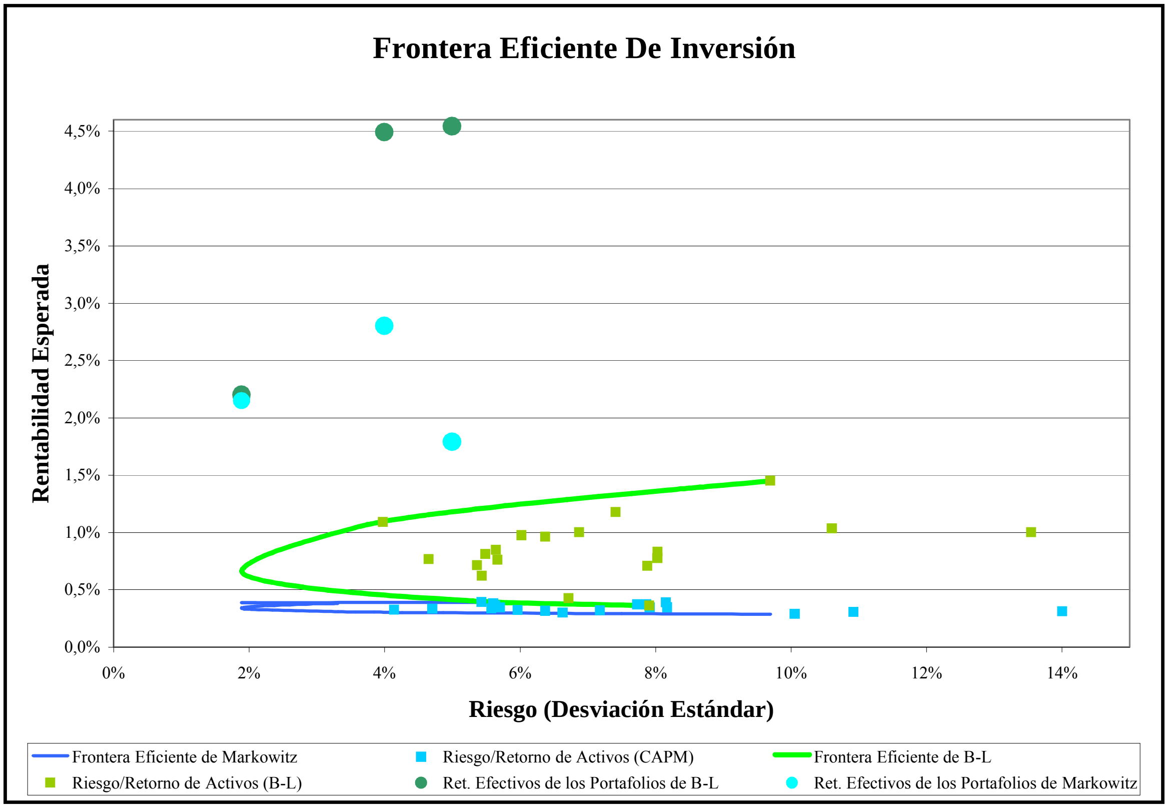

Gráfico 21: Fronteras Eficiente de Inversión, al 27 de Enero, 2006.

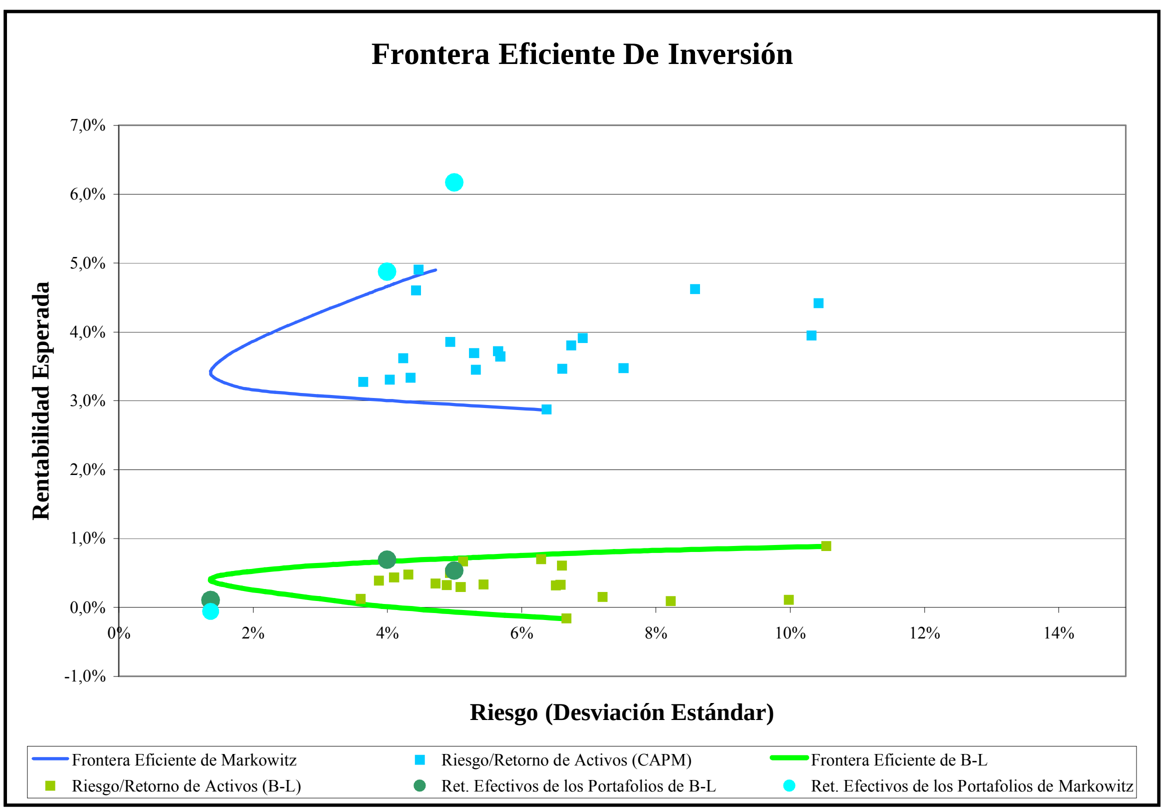

Gráfico 22: Fronteras Eficiente de Inversión, al 26 de Enero, 2007.

7.7 Rango De Riesgo Disponible Para Inversiones Que Entrega Cada Modelo.

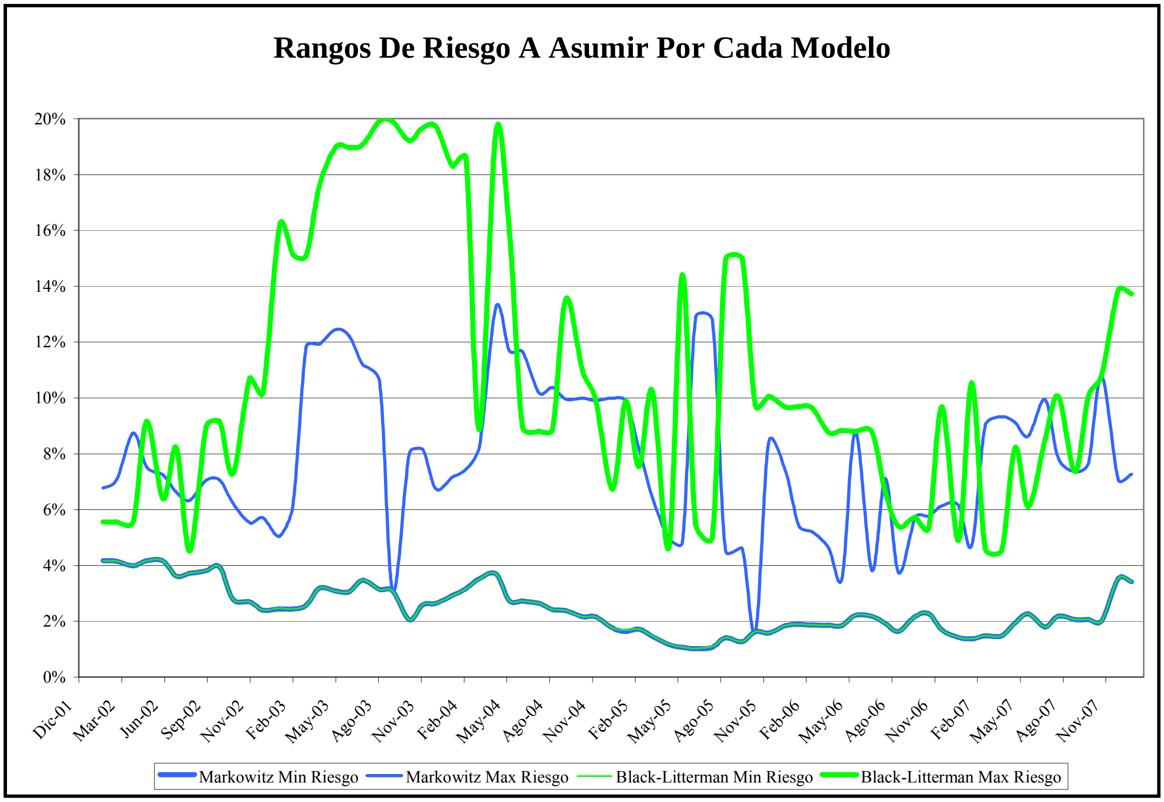

Gráfico 23: Rangos de riesgo a asumir, disponibles según ambos modelos.

Se puede apreciar de la gráfica anterior que el riesgo mínimo es coincidente para ambos modelos, mientras que Black-Litterman entrega la posibilidad de asumir riesgos mayores.

7.8 Tablas Resúmenes De Datos Calculados Por Cada Modelo.

Tabla 18: Cuadro resumen de rentabilidades esperadas y efectivas, parciales y acumuladas, para cada modelo. Riesgo mínimo de los portafolios.

Minima Varianza								
	Markowitz				Black-Litterman			
Fecha	E(r)	E(r) Acum	r	Racum.	E(r)	E(r) Acum	r	Racum.
25-Ene-02	-0,27%	-0,27%	1,47%	1,47%	1,38%	1,38%	1,39%	1,39%
22-Feb-02	-1,11%	-1,38%	5,62%	7,09%	1,13%	2,51%	5,70%	7,09%
29-Mar-02	1,19%	-0,19%	-3,73%	3,36%	1,64%	4,16%	-3,68%	3,41%
26-Abr-02	0,03%	-0,15%	2,80%	6,16%	0,99%	5,15%	3,06%	6,46%
31-May-02	-0,99%	-1,14%	-1,18%	4,98%	1,92%	7,07%	-1,25%	5,21%
28-Jun-02	-1,52%	-2,66%	-4,11%	0,87%	0,65%	7,72%	-3,95%	1,26%
26-Jul-02	-1,97%	-4,64%	3,63%	4,50%	1,04%	8,76%	3,63%	4,89%
30-Ago-02	-1,12%	-5,76%	3,12%	7,62%	1,17%	9,93%	3,19%	8,08%
27-Sep-02	-2,55%	-8,31%	3,70%	11,32%	0,86%	10,79%	3,80%	11,89%
25-Oct-02	-2,45%	-10,76%	-3,41%	7,91%	0,29%	11,07%	-3,20%	8,68%
29-Nov-02	-1,58%	-12,34%	2,16%	10,08%	3,31%	14,39%	2,24%	10,92%
27-Dic-02	-0,29%	-12,63%	3,71%	13,79%	10,16%	24,55%	3,65%	14,57%
31-Ene-03	0,47%	-12,16%	0,10%	13,88%	2,45%	27,00%	0,19%	14,76%
28-Feb-03	0,04%	-12,12%	4,43%	18,31%	2,57%	29,57%	4,67%	19,42%
28-Mar-03	1,05%	-11,06%	13,88%	32,19%	1,33%	30,90%	13,76%	33,19%
25-Abr-03	2,38%	-8,68%	7,05%	39,25%	2,94%	33,83%	7,38%	40,57%
30-May-03	3,26%	-5,42%	0,47%	39,72%	2,81%	36,65%	0,41%	40,98%
27-Jun-03	2,75%	-2,67%	11,02%	50,73%	2,09%	38,74%	11,56%	52,54%
25-Jul-03	2,78%	0,11%	9,34%	60,08%	2,63%	41,37%	2,63%	55,17%
29-Ago-03	3,49%	3,59%	2,99%	63,07%	1,16%	42,53%	4,21%	59,38%
26-Sep-03	3,79%	7,38%	7,67%	70,75%	1,91%	44,44%	9,39%	68,78%
31-Oct-03	4,86%	12,24%	-3,53%	67,21%	1,50%	45,94%	-3,50%	65,27%
28-Nov-03	4,50%	16,74%	0,74%	67,96%	1,32%	47,27%	0,80%	66,07%
26-Dic-03	2,43%	19,17%	-1,87%	66,09%	1,33%	48,60%	-1,86%	64,21%
30-Ene-04	2,48%	21,65%	7,85%	73,94%	1,09%	49,68%	8,03%	72,23%
27-Feb-04	1,13%	22,77%	-3,36%	70,58%	1,12%	50,80%	-3,27%	68,96%
26-Mar-04	1,61%	24,39%	-1,66%	68,92%	0,86%	51,66%	-1,73%	67,24%
30-Abr-04	0,25%	24,64%	-0,20%	68,72%	2,33%	53,99%	-0,05%	67,19%
28-May-04	-0,67%	23,97%	2,15%	70,86%	1,09%	55,08%	2,11%	69,30%
25-Jun-04	-0,19%	23,78%	5,05%	75,91%	1,77%	56,86%	5,14%	74,44%
30-Jul-04	0,12%	23,90%	4,81%	80,72%	1,95%	58,80%	4,40%	78,84%
27-Ago-04	1,07%	24,97%	1,72%	82,44%	1,70%	60,51%	1,61%	80,45%
24-Sep-04	0,77%	25,75%	0,70%	83,14%	1,47%	61,98%	0,79%	81,23%
29-Oct-04	2,24%	27,99%	1,28%	84,42%	1,31%	63,29%	1,27%	82,50%
26-Nov-04	2,84%	30,83%	2,91%	87,34%	1,29%	64,59%	2,92%	85,42%
31-Dic-04	2,90%	33,73%	0,33%	87,67%	0,65%	65,24%	0,34%	85,76%
28-Ene-05	2,28%	36,01%	8,10%	95,77%	0,60%	65,84%	5,14%	90,90%
25-Feb-05	2,59%	38,61%	-1,85%	93,93%	0,66%	66,50%	2,58%	93,48%
25-Mar-05	2,04%	40,65%	-5,85%	88,08%	0,54%	67,04%	-0,78%	92,70%
29-Abr-05	1,94%	42,60%	0,42%	88,50%	0,54%	67,58%	1,06%	93,75%
27-May-05	1,37%	43,96%	-0,58%	87,92%	0,64%	68,23%	2,46%	96,21%
24-Jun-05	2,08%	46,04%	5,89%	93,81%	0,49%	68,71%	5,16%	101,37%
29-Jul-05	2,70%	48,74%	-2,70%	91,11%	0,60%	69,32%	-2,75%	98,62%

26-Ago-05	2,28%	51,02%	1,90%	93,01%	0,66%	69,98%	1,42%	100,03%
30-Sep-05	1,56%	52,58%	-7,89%	85,12%	0,55%	70,53%	-4,06%	95,98%
28-Oct-05	0,80%	53,38%	0,71%	85,82%	0,59%	71,12%	0,70%	96,68%
25-Nov-05	0,77%	54,15%	-3,39%	82,43%	0,63%	71,75%	-3,07%	93,60%
30-Dic-05	0,15%	54,29%	3,68%	86,11%	0,85%	72,60%	3,62%	97,22%
27-Ene-06	0,34%	54,63%	2,15%	88,26%	0,66%	73,26%	2,20%	99,42%
24-Feb-06	-0,02%	54,62%	-0,79%	87,46%	0,69%	73,95%	-0,79%	98,63%
31-Mar-06	0,40%	55,01%	0,64%	88,10%	0,62%	74,57%	0,61%	99,24%
28-Abr-06	0,35%	55,36%	-4,90%	83,20%	0,61%	75,17%	-4,98%	94,26%
26-May-06	0,64%	56,00%	-1,33%	81,86%	0,72%	75,89%	-1,62%	92,63%
30-Jun-06	0,41%	56,41%	0,90%	82,77%	0,97%	76,86%	0,96%	93,59%
28-Jul-06	1,09%	57,49%	1,73%	84,49%	0,73%	77,59%	1,71%	95,29%
25-Ago-06	0,34%	57,84%	8,45%	92,95%	0,98%	78,57%	8,26%	103,55%
29-Sep-06	0,70%	58,53%	4,07%	97,02%	0,91%	79,47%	4,10%	107,65%
27-Oct-06	1,05%	59,58%	4,37%	101,39%	0,78%	80,25%	4,36%	112,01%
24-Nov-06	1,78%	61,36%	6,11%	107,50%	0,47%	80,72%	5,86%	117,87%
29-Dic-06	2,73%	64,08%	4,69%	112,18%	0,51%	81,23%	4,93%	122,81%
26-Ene-07	3,43%	67,51%	-0,06%	112,13%	0,41%	81,65%	0,10%	122,91%
23-Feb-07	4,01%	71,52%	2,32%	114,44%	0,53%	82,17%	1,95%	124,86%
30-Mar-07	3,98%	75,50%	9,43%	123,87%	0,51%	82,69%	9,27%	134,13%
27-Abr-07	4,03%	79,53%	-4,92%	118,96%	0,28%	82,97%	-4,95%	129,18%
25-May-07	3,92%	83,45%	10,55%	129,51%	0,60%	83,57%	11,04%	140,21%
29-Jun-07	3,94%	87,38%	-4,17%	125,34%	0,54%	84,10%	-4,14%	136,08%
27-Jul-07	2,67%	90,05%	1,48%	126,82%	0,66%	84,76%	1,62%	137,70%
31-Ago-07	2,06%	92,10%	0,66%	127,48%	0,66%	85,42%	0,75%	138,45%
28-Sep-07	1,50%	93,60%	6,92%	134,40%	0,67%	86,09%	6,64%	145,09%
26-Oct-07	2,44%	96,04%	-10,13%	124,27%	0,66%	86,75%	-10,21%	134,88%
30-Nov-07	0,26%	96,31%	-0,25%	124,03%	1,00%	87,75%	-0,30%	134,58%
28-Dic-07	-0,63%	95,67%	-14,02%	110,01%	1,17%	88,92%	-13,95%	120,63%

Tabla 19: Cuadro resumen de rentabilidades esperadas y efectivas, parciales y acumuladas, para cada modelo. Riesgo de los portafolios, 4%.

Cartera al 4%								
	Markowitz				Black-Litterman			
Fecha	E(r)	E(r) Acum	r	Racum.	E(r)	E(r) Acum	r	Racum.
25-Ene-02	0,25%	0,25%	1,47%	1,47%	1,38%	1,38%	2,56%	2,56%
22-Feb-02	-1,11%	-0,86%	5,62%	7,09%	1,13%	2,51%	5,70%	8,26%
29-Mar-02	1,20%	0,34%	-3,76%	3,33%	1,76%	4,27%	-3,39%	4,87%
26-Abr-02	0,03%	0,37%	2,80%	6,13%	0,99%	5,26%	3,06%	7,92%
31-May-02	-0,99%	-0,62%	-1,18%	4,95%	1,92%	7,18%	-1,25%	6,67%
28-Jun-02	0,15%	-0,47%	-6,08%	-1,13%	0,65%	7,83%	-3,87%	2,81%
26-Jul-02	-1,76%	-2,23%	5,26%	4,12%	1,67%	9,50%	3,21%	6,02%
30-Ago-02	-1,03%	-3,26%	4,42%	8,54%	1,53%	11,03%	3,63%	9,65%
27-Sep-02	-2,42%	-5,68%	4,32%	12,86%	0,98%	12,01%	3,91%	13,55%
25-Oct-02	-1,86%	-7,53%	-0,08%	12,78%	1,21%	13,22%	-5,90%	7,66%
29-Nov-02	-1,21%	-8,74%	0,90%	13,68%	5,41%	18,62%	0,95%	8,60%
27-Dic-02	-0,18%	-8,92%	2,56%	16,24%	23,95%	42,57%	5,85%	14,45%
31-Ene-03	0,48%	-8,44%	-0,75%	15,48%	4,53%	47,10%	0,27%	14,72%
28-Feb-03	0,10%	-8,34%	2,22%	17,70%	12,07%	59,17%	4,88%	19,60%

28-Mar-03	1,30%	-7,05%	10,29%	27,99%	5,13%	64,30%	12,06%	31,66%
25-Abr-03	2,89%	-4,16%	9,56%	37,56%	4,46%	68,76%	9,64%	41,29%
30-May-03	3,93%	-0,23%	-0,16%	37,40%	4,35%	73,11%	4,51%	45,81%
27-Jun-03	3,35%	3,12%	11,98%	49,38%	3,42%	76,53%	9,16%	54,97%
25-Jul-03	3,21%	6,33%	5,41%	54,79%	3,29%	79,82%	9,60%	64,56%
29-Ago-03	4,29%	10,62%	3,33%	58,12%	1,85%	81,67%	3,67%	68,24%
26-Sep-03	4,98%	15,60%	7,22%	65,33%	3,43%	85,10%	8,98%	77,21%
31-Oct-03	7,20%	22,80%	-5,25%	60,08%	2,82%	87,92%	-2,80%	74,42%
28-Nov-03	6,25%	29,05%	2,20%	62,29%	3,27%	91,19%	1,03%	75,44%
26-Dic-03	3,40%	32,44%	-6,08%	56,20%	2,88%	94,07%	-4,03%	71,41%
30-Ene-04	3,36%	35,80%	9,99%	66,19%	2,20%	96,27%	6,51%	77,92%
27-Feb-04	1,34%	37,14%	-4,78%	61,41%	2,02%	98,29%	-1,99%	75,93%
26-Mar-04	1,88%	39,02%	-2,49%	58,92%	1,82%	100,11%	-1,04%	74,89%
30-Abr-04	0,26%	39,29%	2,57%	61,49%	3,16%	103,27%	1,38%	76,27%
28-May-04	-0,51%	38,78%	-0,86%	60,63%	2,20%	105,46%	1,75%	78,01%
25-Jun-04	-0,09%	38,69%	5,20%	65,83%	3,09%	108,55%	3,90%	81,91%
30-Jul-04	0,17%	38,86%	1,01%	66,84%	3,69%	112,24%	6,61%	88,52%
27-Ago-04	1,31%	40,17%	5,05%	71,89%	3,44%	115,67%	0,42%	88,94%
24-Sep-04	0,89%	41,07%	4,99%	76,88%	3,28%	118,95%	7,89%	96,84%
29-Oct-04	2,82%	43,89%	0,55%	77,43%	3,14%	122,09%	6,47%	103,30%
26-Nov-04	3,71%	47,60%	1,41%	78,84%	3,85%	125,94%	-0,05%	103,25%
31-Dic-04	4,14%	51,74%	-0,96%	77,88%	2,27%	128,21%	-1,01%	102,24%
28-Ene-05	3,13%	54,87%	4,35%	82,23%	1,03%	129,23%	5,69%	107,93%
25-Feb-05	3,67%	58,54%	3,16%	85,39%	1,74%	130,97%	4,75%	112,68%
25-Mar-05	3,05%	61,58%	0,50%	85,88%	0,82%	131,79%	0,29%	112,97%
29-Abr-05	2,47%	64,05%	0,67%	86,56%	0,97%	132,76%	-2,03%	110,94%
27-May-05	1,63%	65,68%	6,09%	92,64%	1,41%	134,17%	5,17%	116,11%
24-Jun-05	2,56%	68,25%	1,99%	94,63%	1,07%	135,24%	5,36%	121,48%
29-Jul-05	3,27%	71,51%	0,21%	94,84%	0,94%	136,18%	1,80%	123,28%
26-Ago-05	2,89%	74,40%	-1,96%	92,89%	1,30%	137,48%	-3,28%	120,00%
30-Sep-05	1,87%	76,26%	-5,86%	87,03%	1,00%	138,48%	-3,13%	116,87%
28-Oct-05	0,84%	77,10%	0,03%	87,06%	1,18%	139,66%	-6,75%	110,12%
25-Nov-05	0,84%	77,94%	-9,71%	77,35%	1,50%	141,15%	-4,78%	105,34%
30-Dic-05	0,26%	78,19%	6,21%	83,57%	1,55%	142,70%	1,67%	107,01%
27-Ene-06	0,39%	78,58%	2,80%	86,37%	1,10%	143,80%	4,49%	111,50%
24-Feb-06	0,13%	78,71%	-3,25%	83,12%	1,22%	145,02%	-4,49%	107,01%
31-Mar-06	0,44%	79,14%	-1,12%	82,00%	0,96%	145,98%	0,33%	107,34%
28-Abr-06	0,41%	79,55%	-4,29%	77,72%	0,82%	146,79%	-6,27%	101,06%
26-May-06	0,67%	80,22%	-4,23%	73,49%	1,06%	147,86%	-4,39%	96,67%
30-Jun-06	0,44%	80,66%	-0,27%	73,22%	1,59%	149,45%	-2,54%	94,13%
28-Jul-06	1,26%	81,92%	0,72%	73,94%	1,09%	150,53%	2,09%	96,22%
25-Ago-06	0,40%	82,32%	7,28%	81,23%	1,92%	152,45%	7,34%	103,56%
29-Sep-06	0,79%	83,11%	2,71%	83,93%	1,40%	153,85%	3,73%	107,30%
27-Oct-06	1,30%	84,40%	8,50%	92,43%	1,26%	155,11%	10,21%	117,51%
24-Nov-06	2,20%	86,60%	8,22%	100,65%	0,62%	155,73%	14,99%	132,49%
29-Dic-06	3,37%	89,97%	1,73%	102,39%	0,88%	156,61%	16,26%	148,76%
26-Ene-07	4,66%	94,64%	4,87%	107,26%	0,67%	157,27%	0,69%	149,45%
23-Feb-07	5,28%	99,91%	1,53%	108,79%	0,92%	158,20%	-0,32%	149,12%
30-Mar-07	5,02%	104,93%	11,78%	120,56%	0,78%	158,98%	12,29%	161,42%
27-Abr-07	5,15%	110,08%	-2,54%	118,02%	0,69%	159,67%	-1,58%	159,83%
25-May-07	4,75%	114,83%	11,79%	129,82%	0,88%	160,54%	8,13%	167,96%
29-Jun-07	4,97%	119,80%	-7,58%	122,24%	1,08%	161,63%	-3,79%	164,17%
27-Jul-07	3,10%	122,90%	-2,92%	119,32%	1,15%	162,77%	0,22%	164,39%

31-Ago-07	2,26%	125,16%	-3,80%	115,53%	1,15%	163,93%	-4,60%	159,79%
28-Sep-07	1,60%	126,75%	13,03%	128,56%	1,07%	165,00%	6,87%	166,66%
26-Oct-07	2,65%	129,40%	-11,54%	117,02%	1,01%	166,01%	-11,09%	155,57%
30-Nov-07	0,29%	129,69%	-2,27%	114,75%	1,29%	167,31%	-0,11%	155,46%
28-Dic-07	-0,53%	129,16%	-15,92%	98,83%	1,52%	168,83%	-15,68%	139,78%

Tabla 20: Cuadro resumen de rentabilidades esperadas y efectivas, parciales y acumuladas, para cada modelo. Riesgo de los portafolios, 5%.

Cartera al 5%								
	Markowitz				Black-Litterman			
Fecha	**E(r)**	**E(r) Acum**	**r**	**Racum.**	**E(r)**	**E(r) Acum**	**r**	**Racum.**
25-Ene-02	-0,09%	-0,09%	-1,60%	-1,60%	2,46%	2,46%	1,41%	1,41%
22-Feb-02	-0,69%	-0,78%	-0,62%	-2,22%	2,32%	4,78%	4,12%	5,53%
29-Mar-02	1,40%	0,63%	-3,35%	-5,57%	2,99%	7,77%	-0,24%	5,29%
26-Abr-02	0,12%	0,74%	1,88%	-3,69%	2,46%	10,23%	2,76%	8,05%
31-May-02	-0,71%	0,04%	0,33%	-3,36%	2,99%	13,22%	-5,07%	2,98%
28-Jun-02	-1,10%	-1,06%	-8,51%	-11,87%	2,38%	15,59%	-2,54%	0,44%
26-Jul-02	-1,49%	-2,55%	7,25%	-4,61%	1,94%	17,53%	1,96%	2,40%
30-Ago-02	-0,87%	-3,42%	6,10%	1,48%	2,27%	19,80%	4,00%	6,40%
27-Sep-02	-2,12%	-5,54%	6,15%	7,64%	1,66%	21,46%	3,69%	10,09%
25-Oct-02	-1,71%	-7,25%	0,38%	8,02%	1,38%	22,84%	-5,43%	4,65%
29-Nov-02	-1,10%	-8,36%	0,06%	8,08%	6,12%	28,96%	0,09%	4,75%
27-Dic-02	-0,15%	-8,50%	1,79%	9,87%	28,60%	57,56%	6,21%	10,96%
31-Ene-03	0,48%	-8,03%	-0,76%	9,11%	5,16%	62,72%	0,88%	11,84%
28-Feb-03	0,11%	-7,91%	1,10%	10,21%	5,77%	68,49%	4,05%	15,89%
28-Mar-03	1,39%	-6,52%	11,31%	21,52%	3,14%	71,63%	15,84%	31,74%
25-Abr-03	3,21%	-3,31%	9,91%	31,43%	5,21%	76,84%	11,69%	43,42%
30-May-03	4,37%	1,06%	-1,05%	30,38%	5,36%	82,20%	5,74%	49,17%
27-Jun-03	3,70%	4,75%	9,90%	40,28%	4,29%	86,48%	8,26%	57,43%
25-Jul-03	3,64%	8,39%	5,18%	45,46%	4,03%	90,51%	12,57%	70,00%
29-Ago-03	4,86%	13,24%	0,11%	45,58%	2,28%	92,79%	3,87%	73,86%
26-Sep-03	5,75%	18,99%	8,08%	53,66%	4,13%	96,92%	8,27%	82,13%
31-Oct-03	7,70%	26,69%	-5,53%	48,13%	3,17%	100,09%	-3,03%	79,11%
28-Nov-03	6,78%	33,47%	2,84%	50,97%	4,11%	104,20%	1,59%	80,70%
26-Dic-03	3,69%	37,16%	-6,69%	44,28%	3,42%	107,62%	-3,70%	77,00%
30-Ene-04	3,82%	40,98%	11,85%	56,13%	2,83%	110,44%	5,24%	82,24%
27-Feb-04	1,52%	42,49%	-7,49%	48,64%	2,57%	113,01%	-1,25%	80,98%
26-Mar-04	2,18%	44,68%	3,33%	51,98%	2,66%	115,67%	-1,30%	79,68%
30-Abr-04	0,27%	44,95%	4,77%	56,75%	4,11%	119,78%	2,01%	81,70%
28-May-04	-0,49%	44,46%	-0,97%	55,78%	2,65%	122,42%	1,31%	83,01%
25-Jun-04	-0,07%	44,39%	4,73%	60,52%	3,47%	125,89%	5,33%	88,34%
30-Jul-04	0,18%	44,56%	3,88%	64,39%	4,19%	130,08%	8,35%	96,70%
27-Ago-04	1,39%	45,96%	6,38%	70,77%	3,80%	133,87%	2,73%	99,43%
24-Sep-04	0,94%	46,89%	6,24%	77,02%	3,99%	137,86%	11,67%	111,10%
29-Oct-04	3,03%	49,92%	0,37%	77,38%	3,32%	141,18%	7,91%	119,01%
26-Nov-04	4,06%	53,98%	1,03%	78,41%	3,85%	145,03%	-2,65%	116,36%
31-Dic-04	4,33%	58,31%	-1,87%	76,54%	2,79%	147,82%	-1,15%	115,20%
28-Ene-05	3,35%	61,66%	3,73%	80,27%	1,18%	149,00%	4,73%	119,93%
25-Feb-05	3,91%	65,56%	2,05%	82,32%	2,04%	151,04%	5,24%	125,17%

25-Mar-05	3,14%	68,70%	-0,17%	82,15%	0,88%	151,92%	-0,29%	124,88%
29-Abr-05	2,51%	71,21%	0,51%	82,66%	1,01%	152,93%	-1,76%	123,12%
27-May-05	1,63%	72,84%	3,82%	86,48%	1,52%	154,45%	4,32%	127,45%
24-Jun-05	2,57%	75,41%	2,10%	88,57%	1,18%	155,63%	5,19%	132,64%
29-Jul-05	3,28%	78,68%	-0,18%	88,39%	0,98%	156,60%	2,11%	134,75%
26-Ago-05	2,90%	81,59%	-2,45%	85,94%	1,19%	157,80%	-3,51%	131,24%
30-Sep-05	1,87%	83,45%	-6,26%	79,69%	1,07%	158,87%	-5,17%	126,06%
28-Oct-05	0,88%	84,34%	-1,10%	78,58%	1,30%	160,17%	-8,51%	117,56%
25-Nov-05	0,84%	85,18%	-11,82%	66,76%	1,61%	161,79%	-3,12%	114,44%
30-Dic-05	0,27%	85,45%	3,22%	69,98%	1,75%	163,53%	2,15%	116,58%
27-Ene-06	0,39%	85,84%	1,79%	71,77%	1,18%	164,71%	4,54%	121,13%
24-Feb-06	0,13%	85,97%	-6,00%	65,76%	1,32%	166,03%	-6,98%	114,15%
31-Mar-06	0,44%	86,41%	-1,29%	64,48%	0,99%	167,02%	1,66%	115,81%
28-Abr-06	0,41%	86,82%	-4,29%	60,19%	0,88%	167,90%	-6,90%	108,90%
26-May-06	0,67%	87,49%	-2,14%	58,05%	1,12%	169,02%	-5,97%	102,93%
30-Jun-06	0,45%	87,93%	-0,27%	57,78%	1,77%	170,79%	-2,01%	100,92%
28-Jul-06	1,28%	89,21%	0,04%	57,82%	1,18%	171,97%	1,81%	102,73%
25-Ago-06	0,40%	89,62%	7,28%	65,11%	2,01%	173,98%	6,56%	109,29%
29-Sep-06	0,80%	90,42%	2,98%	68,08%	1,49%	175,47%	3,60%	112,89%
27-Oct-06	1,35%	91,76%	9,04%	77,12%	1,35%	176,82%	7,74%	120,63%
24-Nov-06	2,30%	94,06%	5,48%	82,60%	0,64%	177,45%	15,87%	136,50%
29-Dic-06	3,55%	97,61%	1,77%	84,37%	0,95%	178,40%	19,78%	156,28%
26-Ene-07	4,90%	102,51%	6,17%	90,54%	0,71%	179,12%	0,53%	156,82%
23-Feb-07	5,38%	107,89%	-0,14%	90,40%	0,98%	180,09%	-0,17%	156,64%
30-Mar-07	5,10%	112,99%	10,09%	100,49%	0,79%	180,88%	12,84%	169,48%
27-Abr-07	5,28%	118,27%	-0,79%	99,70%	0,69%	181,57%	2,58%	172,06%
25-May-07	4,94%	123,20%	10,28%	109,99%	0,92%	182,49%	10,92%	182,98%
29-Jun-07	5,14%	128,34%	-7,16%	102,83%	1,17%	183,66%	-4,07%	178,91%
27-Jul-07	3,23%	131,58%	-1,58%	101,25%	1,26%	184,92%	-0,14%	178,77%
31-Ago-07	2,31%	133,89%	-5,18%	96,07%	1,18%	186,10%	-6,34%	172,42%
28-Sep-07	1,63%	135,51%	12,40%	108,47%	1,17%	187,27%	9,02%	181,45%
26-Oct-07	2,72%	138,23%	-11,89%	96,59%	1,13%	188,40%	-11,24%	170,20%
30-Nov-07	0,31%	138,54%	-4,73%	91,86%	1,58%	189,97%	-2,23%	167,97%
28-Dic-07	-0,46%	138,08%	-16,12%	75,74%	1,79%	191,76%	-16,53%	151,44%