INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Curso: IN56A
Semestre: Otoño
Profesores: José Miguel Cruz
Gonzalo Maturana
Ercos Valdivieso

CTP N° 4

Tiempo: 35 minutos

Problema 1 (4,5 ptos)

Demuestre que el retorno de un activo i cualquiera puede expresarse como

$$r_i - r_f = \beta_{i,M} \cdot (r_M - r_f)$$

Donde $\beta_{i,M} = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2}$.

Problema 2 (1,5 ptos)

Suponga que un activo que se transa en el mercado tiene un beta con respecto a su portafolio de inversión de 0,7. Se estima, por otro lado, que este activo debiera rentar un 12% anual. Si la tasa libre de riesgo está en 5% anual y el premio por riesgo de mercado (exceso de retorno del mercado por sobre la tasa libre de riesgo) es de 7% anual, ¿Compraría usted el activo? ¿Por qué?

SOLUCIÓN:

Problema 1 (4,5 ptos)

Esta demostración fue vista en clases y está en las diapositivas del curso.

Consideremos una cartera (cartera q) compuesta por el activo i y la cartera de mercado. Sea α la proporción de la cartera invertida en el activo i. Así, el retorno y varianza de la cartera estarán dados por:

$$r_q = \alpha \cdot r_i + (1-\alpha) \cdot r_M$$
$$\sigma_q^2 = \alpha^2 \cdot \sigma_i^2 + (1-\alpha)^2 \cdot \sigma_M^2 + 2 \cdot \alpha \cdot (1-\alpha) \cdot \sigma_{i,M}$$

La pendiente la línea de retorno riesgo para el portafolio q se calcula como

$$\frac{dr_q}{d\sigma_q} = \frac{\dfrac{\partial r_q}{\partial \alpha}}{\dfrac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha}}$$

Desarrollando,

$$\frac{\partial r_q}{\partial \alpha} = r_i - r_M$$
$$\frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha} = \frac{1}{2 \cdot \sigma_q} \cdot \frac{\partial \sigma_q^2}{\partial \alpha}$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha} = \frac{1}{2 \cdot \sigma_q} \cdot \left[2 \cdot \alpha \cdot \sigma_i^2 - 2 \cdot (1-\alpha) \cdot \sigma_M^2 + 2 \cdot (1-\alpha) \cdot \sigma_{i,M} - 2 \cdot \alpha \cdot \sigma_{i,M}\right]$$
$$\Rightarrow \frac{\partial \sigma_q}{\partial \alpha} = \frac{\alpha \cdot \left(\sigma_i^2 + \sigma_M^2 - 2 \cdot \sigma_{i,M}\right) + \sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_q}$$

Evaluando en $\alpha = 0$, es decir, todo invertido en la cartera M ($\sigma_q = \sigma_M$ si $\alpha = 0$):

$$\frac{dr_q}{d\sigma_q} = \frac{r_i - r_M}{\left(\dfrac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$$

La pendiente anterior debe ser igual a la de la Línea de Mercado de Capitales (que une el activo libre de riesgo con la cartera M)

$$\frac{r_M - r_f}{\sigma_M} = \frac{r_i - r_M}{\left(\dfrac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)}$$

Desarrollando,

$$\frac{r_M - r_f}{\sigma_M} = \frac{r_i - r_M}{\left(\frac{\sigma_{i,M} - \sigma_M^2}{\sigma_M}\right)} \qquad / \cdot \sigma_M$$

$$r_M - r_f = \frac{r_i - r_M}{\left(\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} - 1\right)}$$

$$(r_M - r_f) \cdot \left(\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} - 1\right) = r_i - r_M$$

$$\frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \cdot (r_M - r_f) - r_M + r_f = r_i - r_M \Rightarrow \qquad r_i - r_f = \frac{\sigma_{i,M}}{\sigma_M^2} \cdot (r_M - r_f)$$

Luego, $r_i - r_f = \beta_{i,M} \cdot (r_M - r_f)$

Problema 2 (1,5 ptos)

Para calcular el retorno exigido al activo i dado el portafolio de inversión, usamos

$$r_i = r_f + \beta \cdot (r_M - r_f)$$

Luego $r_i = 5\% + 0{,}7 \cdot 7\% = 9{,}9\%$. Como se espera que el activo rente 12% (más que el retorno exigido), se debiera comprar el activo.