INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

7. APT: Arbitrage Pricing Theory

IN56A

Introducción

La teoría que subyace al CAPM comienza con un análisis de cómo el inversionista construye su cartera eficiente.

La Teoría de Valorización por Arbitraje no pregunta qué carteras son eficientes, sino que supone que la rentabilidad de cada acción depende de diversas influencias macroeconómicas o “factores”, además de perturbaciones que son específicas para cada empresa.

El modelo se escribe de la siguiente forma:

$$\boxed{\tilde{r}_i = a_i + b_{1i} \cdot \tilde{f}_1 + b_{2i} \cdot \tilde{f}_2 + \ldots + b_{ki} \cdot \tilde{f}_k + \tilde{e}_i}$$

- donde $E\left(\tilde{e}_i \cdot \tilde{e}_j\right) = E\left(\tilde{e}_i \cdot \tilde{f}_k\right) = 0$

Ejemplo: 1 factor

Si consideramos el caso de 1 factor:

$$\tilde{r}_i = a_i + b_i \cdot \tilde{f} + \tilde{e}_i$$

¿Cómo calcular los parámetros del modelo? Observamos los valores de r_i y f por lo que podemos determinar que:

$$(1) \quad \bar{r}_i = a_i + b_i \cdot \bar{f}$$

$$(2) \quad \operatorname{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{f}) = \operatorname{cov}(a_i + b_i \cdot \tilde{f} + \tilde{e}_i, \tilde{f}) = b_i \cdot s_f^2$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

¿a y b independientes entre sí?

Pregunta: ¿Existe un activo i tal que $a_i = 0,5$ y $b_i = 1$,donde $\tilde{f}$ sea el retorno del índice IPSA?

$$\Rightarrow \quad ¡¡E(r_i) = 50\% + 1 \cdot \bar{r}_{IPSA}\ !!$$

Supuesto CAPM: carteras formadas por activos son eficientes.

Supuestos APT:

- .No existen oportunidades de arbitraje.
- El universo de activos es suficientemente grande.

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Cartera que no dependa de f (I)

Supongamos se cumple el modelo de un factor:

$$\bar{r}_i = a_i + b_i \cdot \bar{f}$$

Si construimos una cartera, con w invertido en el activo i y (1-w) invertido en el activo j, su retorno esperado es:

$$\bar{r} = w \cdot a_i + (1 - w) \cdot a_j + \left[w \cdot b_i + (1 - w) \cdot b_j\right] \cdot \bar{f}$$

Ahora, si imponemos que esta cartera es independiente de f, se debe cumplir que:

$$\left[w \cdot b_i + (1 - w) \cdot b_j\right] = 0$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

Cartera que no dependa de f (II)

… lo que implica que:

$$w = \frac{b_j}{b_j - b_i} \text{ con } b_i \neq b_j$$

La cartera, que no depende de f debe rentar igual que el activo libre de riesgo.

El valor esperado del retorno lo podemos escribir como:

$$E(\tilde{r}) = \frac{b_j}{b_j - b_i} \cdot a_i + \frac{b_i}{b_i - b_j} \cdot a_j = ?_0$$

$$\Rightarrow ?_0 \cdot \left(b_j - b_i\right) = a_i \cdot b_j - a_j \cdot b_i$$

Cartera que no dependa de f (III)

Factorizando por b_j:

$$b_j \cdot \left(?_0 - ?_0 \cdot \frac{b_i}{b_j} \right) = b_j \cdot \left(a_i - a_j \cdot \frac{b_i}{b_j} \right)$$

… y luego por b_i:

$$b_i \cdot \left(\frac{?_0}{b_i} - \frac{?_0}{b_j} \right) = b_i \cdot \left(\frac{a_i}{b_i} - \frac{a_j}{b_j} \right)$$

Obtenemos que:

$$\frac{?_0 - a_i}{b_i} = \frac{?_0 - a_j}{b_j}$$

Por lo que se demuestra que a y b no son independientes:

$$\boxed{a_i = c \cdot b_i + ?_0}$$

APT sin riesgo

Luego podemos estimar el retorno esperado del activo i

$$\bar{r}_i = a_i + b_i \cdot \bar{f} = ?_0 + b_i \cdot c + b_i \cdot \bar{f} = ?_0 + \underbrace{\left(c + \bar{f}\right)}_{?_1} \cdot b_i$$

$$\Rightarrow \bar{r}_i = ?_0 + ?_1 \cdot b_i$$

INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

APT sin riesgo – n activos (I)

Podemos generalizar para k factores de riesgo y n activos, donde n>k. Si tenemos que:

$$\tilde{r}_i = a_i + \sum_{j=1}^{k} b_{ij} \cdot \tilde{f}_j + \tilde{e}_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$$

Entonces existen constantes $?_0, ?_1, \ldots, ?_k$ tales que

$$\boxed{\bar{r}_i = ?_0 + \sum_{j=1}^{k} b_{ij} \cdot ?_j}$$

APT sin riesgo – n activos (II)

Para demostrar lo anterior, basta construir una cartera sin inversión inicial (lo que equivale a que la suma de los w_i sea 0) y sin exposición a ningún factor de riesgo. Entonces, por el Principio de No Arbitraje, el retorno esperado de la cartera debe ser 0 (suponemos por el momento que no existe riesgo diversificable).

Esta cartera se denomina "cartera de arbitraje"

- Para el caso de 2 factores se selecciona w tal que:

$$w' \cdot 1 = 0 \,, \quad w' \cdot b_1 = 0 \,, \quad y \quad w' \cdot b_2 = 0$$
$$\Rightarrow w' \cdot \bar{r} = 0$$

(Por No Arbitraje)

APT sin riesgo – n activos (III)

Entonces r es una combinación lineal de los vectores 1, b_1 y b_2. De esta forma existen $?_0, ?_1$ y $?_2$ tales que

$$\boxed{\bar{r} = ?_0 \cdot 1 + ?_1 \cdot b_1 + ?_2 \cdot b_2}$$

- Donde $\bar{r}$ es el vector de retornos esperados de los n activos

APT genérico (I)

Hasta el momento hemos considerado el riesgo sistemático (no diversificable), pero para obtener una cartera sin riesgo debemos eliminar el riesgo sistemático y el no-sistemático.

$$\tilde{r}_i = a_i + b_{i1} \cdot \tilde{f}_1 + b_{i2} \cdot \tilde{f}_2 + \cdots + b_{ik} \cdot \tilde{f}_k + \tilde{e}_i$$

Para lograr eliminar este riesgo tenemos que:

- Seleccionar w_i pequeños.
- Diversificar en un número grande de activos.
- Escoger w_i tal que la sensibilidad para cada factor k sea cero

APT genérico (II)

… lo que equivale a que:

$$(1)\quad w_i \approx \frac{1}{n}$$

$$(2)\quad n >> 1$$

$$(3)\quad \sum_i w_i \cdot b_{ik} = 0$$

Resultado APT

Entonces existen constantes $?_0, ?_1, \ldots, ?_k$ tales que

$$\bar{r}_i = ?_0 + ?_1 \cdot b_{i1} + ?_2 \cdot b_{i2} + \cdots + ?_k \cdot b_{ik}$$

Si existe un activo libre de riesgo, $r_f = ?_0$

Cada coeficiente $?_k$ puede ser interpretado como el premio por riesgo asociado al factor k.

- En efecto, si definimos d_k como el retorno esperado de una cartera con sensibilidad 1 al factor k y cero al resto, entonces

$$\boxed{?_k = d_k - r_f}$$

Similitud con el CAPM

Luego,

$$\boxed{\bar{r}_i - r_f = (d_1 - r_f)\cdot b_{i1} + (d_2 - r_f)\cdot b_{i2} + \cdots + (d_k - r_f)\cdot b_{ik}}$$

Si asumimos que los vectores de retornos son conjuntamente normales y que los factores se han transformado para ser ortonormales entre sí, entonces cada uno de los b se calcula como:

$$\boxed{b_{ik} = \frac{\operatorname{cov}(\tilde{r}_i, \tilde{d}_k)}{V(\tilde{d}_k)}}$$

Robustez relativa de APT

APT es mucho más robusta como teoría que CAPM:

- No hace supuestos sobre la distribución empírica de los retornos.
- No hace supuestos fuertes sobre las funciones de utilidad de los individuos.
- Permite que el retorno de los activos en equilibrio sea función de muchos factores, no sólo un beta.
- Entrega resultados sobre el precio relativo de cualquier subconjunto de activo, luego no es necesario medir el universo completo de activos de manera de probar la teoría.
- Teoría no se deriva del portafolio de mercado, luego no se requiere eficiencia de éste.
- APT se extiende fácilmente a más de un período.