Auxiliar 3 - IN51A
Otoño 2010

Profesores: Nicolás Figueroa, Ronald Fischer
Auxiliares: Manuel Marfán, Sebastián Vergara

P1

Suponga que usted a creado una empresa muy exitosa. Sin embargo, es hora de dedicarse a nuevos proyectos, por lo que desea contratar a un gerente que maneje su empresa. El problema es diseñar el contrato de incentivos, ya que usted no tiene tiempo para vigilar al gerente constantemente. La función de utilidad del gerente es conocida: $U = 10 - \frac{10}{w} - G$ donde w es el salario en \$MM y G es el costo en utilidad del esfuerzo. Si el gerente no se esfuerza $G = 0$, si se esfuerza $G = 2$. Usted sabe que si el gerente se esfuerza con probabilidad $p = 2/3$ la empresa tendrá utilidades iguales a \$5MM, y con probabilidad $1 - p = 1/3$ las utilidades serán iguales a \$1MM. Si el gerente no se esfuerza, las probabilidad que las utilidades sean altas es $q = 1/3$. Usted también sabe que el gerente puede encontrar un trabajo alternativo, en que no se tiene que esforzar, en que le pagan \$1.25 MM.

a) Escriba las restricciones de compatibilidad de incentivos y de participación que enfrenta el gerente. ¿Qué significan?

b) Encuentre el salario correspondiente al contrato eficiente de incentivos.

c) Encuentre las utilidades de la empresa.

Solución P1

a) Compatibilidad de incentivos: La utilidad esperada del agente (gerente) si se esfuerza, tiene que ser mayor o igual que la utilidad esperada del agente si no se esfuerza, es decir

$$\frac{2}{3}\left(10 - \frac{10}{w_a} - 2\right) + \frac{1}{3}\left(10 - \frac{10}{w_b} - 2\right) \geq \frac{1}{3}\left(10 - \frac{10}{w_a}\right) + \frac{2}{3}\left(10 - \frac{10}{w_b}\right) \tag{2.63}$$

Simplificando la expresión anterior

$$\frac{2}{3}\left(-\frac{10}{w_a}\right) + \frac{1}{3}\left(-\frac{10}{w_b}\right) - 2 \geq \frac{1}{3}\left(-\frac{10}{w_a}\right) + \frac{2}{3}\left(-\frac{10}{w_b}\right) \tag{2.64}$$

$$-2 \geq \frac{10}{3w_a} - \frac{10}{3w_b}$$

Restricción de participación: La utilidad esperada del agente (gerente) si se esfuerza, tiene que ser mayor o igual que la utilidad esperada de su trabaja alternativo, es decir

$$\frac{2}{3}\left(10 - \frac{10}{w_a} - 2\right) + \frac{1}{3}\left(10 - \frac{10}{w_b} - 2\right) \geq 10 - \frac{10}{1,25} \tag{2.65}$$

Simplificando la expresión anterior

$$\frac{2}{3}\left(-\frac{10}{w_a}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{10}{w_b}\right)-2\geq-\frac{10}{1,25} \tag{2.66}$$
$$-\frac{20}{3w_a}-\frac{10}{3w_b}\geq-6$$

b) En equilibrio ambas restricciones son activas, por lo que debemos solucionar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-2=\frac{10}{3w_a}-\frac{10}{3w_b} \tag{2.67}$$

$$-\frac{20}{3w_a}-\frac{10}{3w_b}=-6 \tag{2.68}$$

Restando:

$$-2+6=\frac{10}{3w_a}-\frac{10}{3w_b}+\frac{20}{3w_a}+\frac{10}{3w_b}\Leftrightarrow 4=\frac{30}{3w_a}\Leftrightarrow w_a=\frac{5}{2} \tag{2.69}$$

Reemplazando en la primera ecuación tenemos que $w_b=1$

c) Si la firma tiene éxito las utilidades serán

$$\pi_e=5-w_a=5-\frac{5}{2}=\frac{5}{2} \tag{2.70}$$

en caso contrario $\pi_f=1-w_b=0$. Luego la utilidad esperada es

$$E(\pi)=p_e\pi_e+p_f\pi_f=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{2}+\frac{1}{3}\cdot 0=\frac{5}{3} \tag{2.71}$$

P2

Usted, después de años de intenso estudio, ha decidido emprender un nuevo negocio. El sector en el que desea desenvolverse es la venta de aspiradoras a domicilio. Para esto debe contratar a un vendedor puerta a puerta. Suponga que estos vendedores tienen sólo tres niveles posibles de esfuerzo $\{e_1, e_2; e_3\}$ con $e_1 > e_2 > e_3$ y que el costo asociado a cada nivel es $g(e) = \{\frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{4}{3}\}$ respectivamente. Asuma que la función de utilidad del vendedor esta dada por $v(w) - g(e)$ con $v(w) = \sqrt{w}$ y que su utilidad de reserva es cero. Dependiendo del esfuerzo del vendedor y de factores aleatorios, los ingresos por venta de la empresa puede tomar dos valores: $\pi_H = 10$, $\pi_L = 0$. Las probabilidades de conseguir utilidades altas (π_H) son $\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$ para $\{e_1, e_2; e_3\}$ respectivamente. Usted maximiza su utilidad esperada dada por la diferencia del ingreso por venta y el salario que paga al vendedor.

a) ¿Cuál es el contrato óptimo (nivel de esfuerzo exigido y salario pagado) si el nivel de esfuerzo es observable?

b) Suponga que el nivel de esfuerzo no es observable. Piense bien qué tipo de contrato se puede especificar en estas condiciones. (Para resolver esta parte puede ser más fácil concentrarse en $v(w)$ en vez de en w)

1) Suponga que usted quiere que el vendedor ejerza el nivel de esfuerzo óptimo (que usted encontró en la parte *a*) ¿Qué restricciones adicionales tiene que cumplir el contrato en relación al contrato de la parte *a*)?

2) Demuestre que cuando el esfuerzo no es observable, e_2 no es implementable. ¿Para qué niveles de $g(e_2)$ es e_2 implementable?

3) Encuentre el contrato óptimo

Solución P2

a) Primero veamos el costo mínimo de contratar dado cualquier esfuerzo:
Sea w el salario a pagar y sean $\pi^H(e), \pi^L(e)$ las probabilidades de que dado un esfuerzo e, los resultados sean alto y bajo respectivamente.

$$\min_{w} w$$

$$s.a \sqrt{w} - g(e) \geq 0$$

En el optimo, la restricción se cumple con igualdad, por lo que

$$w(e)^* = g(e)^2$$

Luego, podemos ver cual es el esfuerzo óptimo que el principal quiere implementar:

La utilidad del principal viene dada por $\pi^H(e) \cdot \Pi^H + \pi^L(e) \cdot \Pi^L - w(e)$

$e = e_1$:

$$U(e_1) = \frac{2}{3} \cdot 10 + \frac{1}{3} \cdot 0 - (\frac{5}{3})^2 = \frac{35}{9}$$

$e = e_2$:

$$U(e_2) = \frac{1}{2} \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 0 - (\frac{8}{5})^2 = \frac{61}{25}$$

$e = e_3$:

$$U(e_3) = \frac{1}{3} \cdot 10 + \frac{2}{3} \cdot 0 - (\frac{4}{3})^2 = \frac{14}{9}$$

Claramente la mayor utilidad se alcanza para el esfuerzo $e1$

b1) Ahora como el esfuerzo no es observable, se debe agregar la restricción de compatibilidad de incentivos (IC) que permita implementar el esfuerzo e_1.

De ahora en adelante denotaremos $\sqrt{w_H} = v_H, \sqrt{w_L} = v_L$

$$(IC_2) \qquad \frac{2}{3} \cdot v_H + \frac{1}{3} \cdot v_L - \frac{5}{3} \geq \frac{1}{2} \cdot v_H + \frac{1}{2} \cdot v_L - \frac{8}{5}$$

$$(IC_3) \qquad \frac{2}{3} \cdot v_H + \frac{1}{3} \cdot v_L - \frac{5}{3} \geq \frac{1}{3} \cdot v_H + \frac{2}{3} \cdot v_L - \frac{4}{3}$$

Donde $(IC_2), (IC_3)$ representan las restricciones de que para el agente, el esfuerzo e_1 sea preferido ante los esfuerzos e_2 y e_3 respectivamente

b2) Para mostrar que el esfuerzo e_2 no es implementable, supondremos que sí lo es, y veremos que llegamos a una contradiccion.

Para que el esfuerzo e_2 sea implementable, se necesita la compatibilidad de incentivos, esto es:

$$(IC_1) \qquad \frac{1}{2} \cdot v_H + \frac{1}{2} \cdot v_L - g(e_2) \geq \frac{2}{3} \cdot v_H + \frac{1}{3} \cdot v_L - \frac{5}{3}$$

$$(IC_3) \qquad \frac{1}{2} \cdot v_H + \frac{1}{2} \cdot v_L - g(e_2) \geq \frac{1}{3} \cdot v_H + \frac{2}{3} \cdot v_L - \frac{4}{3}$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene

$$v_H + v_L - 2 \cdot g(e_2) \geq v_H + v_L - \frac{9}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{9}{3} \geq 2 \cdot g(e_2) = \frac{16}{5}$$

lo que es claramente una contradicción, por lo tanto se muestra que el esfuerzo e_2 no es implementable. Para que lo fuera, se deberia cumplir que:

$$2 \cdot g(e_2) \leq \frac{9}{3} \quad \Leftrightarrow \quad g(e_2) \leq \frac{3}{2}$$

b3) Resolvamos el contrato óptimo, considerando que sólo e_1, e_3 son implementables. Para esto, resolveremos el problema del principal, imponiendo primero un esfuerzo e_1 y luego imponiendo e_2 y compararemos las utilidades.

$e = e_1$

$$\max_{v_H \cdot v_L} \frac{2}{3}(10 - {v_H}^2) + \frac{1}{3}(0 - {v_L}^2)$$

$$s.a \qquad \frac{2}{3} \cdot v_H + \frac{1}{3} \cdot v_L - \frac{5}{3} \geq 0 \qquad \leftarrow \lambda$$

$$\frac{2}{3} \cdot v_H + \frac{1}{3} \cdot v_L - \frac{5}{3} \geq \frac{1}{3} \cdot v_H + \frac{2}{3} \cdot v_L - \frac{4}{3} \qquad \leftarrow \mu$$

Las condiciones de primer orden son:

$$v_H : \qquad -\frac{4}{3}v_H - \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu = 0$$

$$v_L : \qquad -\frac{2}{3}v_L - \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\mu = 0$$

Sumando ambas ecuaciones se tiene que:

$$\lambda = -\frac{4}{3}v_H - \frac{2}{3}v_L$$

si $\lambda = 0$ se tiene que necesariamente $v_H = v_L = 0$ ya que los salarios estan definidos positivos por la forma funcional de la utilidad del agente. Si $v_H = v_L = 0$ se viola inmediatamente la primera restricción, por lo que $\lambda \neq 0$

Reemplazando el valor de λ en la primera CPO se despeja μ

$$\mu = \frac{4}{3}(v_L - v_H)$$

si $\mu = 0$ se cumple necesariamente que $v_L = v_H$ y si esto ocurre, se viola la segunda restricción. Por lo tanto $\mu \neq 0$

Como los multiplicadores son ambos distintos de cero, las restricciones son activas, por lo que se cumplen con igualdad:

$$\frac{2}{3} \cdot v_H + \frac{1}{3} \cdot v_L = \frac{5}{3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot v_H - \frac{1}{3} \cdot v_L = \frac{1}{3}$$

de donde se despeja y

$$v_H = 2, v_L = 1 \quad \Rightarrow \quad w_H = 4, w_L = 1$$
$$U(e_1) = \frac{2}{3} \cdot (10 - 4) + \frac{1}{3} \cdot (0 - 1) = \frac{11}{3}$$

$e = e_3$

$$\max_{v_H \cdot v_L} \frac{1}{3}(10 - {v_H}^2) + \frac{2}{3}(0 - {v_L}^2)$$
$$s.a \qquad \frac{1}{3} \cdot v_H + \frac{2}{3} \cdot v_L - \frac{4}{3} \geq 0 \qquad \leftarrow \lambda$$
$$\frac{1}{3} \cdot v_H + \frac{2}{3} \cdot v_L - \frac{4}{3} \geq \frac{2}{3} \cdot v_H + \frac{1}{3} \cdot v_L - \frac{5}{3} \qquad \leftarrow \mu$$

Las condiciones de primer orden son:

$$v_H : \qquad -\frac{2}{3}v_H - \frac{1}{3}\lambda + \frac{1}{3}\mu = 0$$
$$v_L : \qquad -\frac{4}{3}v_L - \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu = 0$$

Estas son las mismas CPO que para el caso anterior, pero intercambiando v_H con v_L, por lo tanto ambas restricciones son activas.

$$\frac{1}{3} \cdot v_H + \frac{2}{3} \cdot v_L = \frac{4}{3}$$
$$\frac{1}{3} \cdot v_H - \frac{1}{3} \cdot v_L = \frac{1}{3}$$

de donde se despeja y

$$v_H = 2, v_L = 1 \quad \Rightarrow \quad w_H = 4, w_L = 1$$
$$U(e_3) = \frac{1}{3} \cdot (10 - 4) + \frac{2}{3} \cdot (0 - 1) = \frac{4}{3}$$

Claramente $U(e_1) > U(e_3)$ por lo que el contrato óptimo es $(e_1, \{w_H = 4, w_L = 1\})$

P3. (Control 2 Otoño 2007) Pedro es averso al riesgo. Su riqueza (w) comprende dos tipos de activos: un depósito que tiene en el banco por $100, y su casa que vale $300. Pedro sabe que si no toma ninguna medida de precaución e=0, hay una probabilidad de $\frac{1}{2}$ de que su casa se incendie, en cuyo caso el valor de su casa se reduce a cero. Sin embargo, si toma algunas medidas que implican ejercer un esfuerzo e=0.3, la probabilidad de incendio se reduce a $\frac{1}{5}$.

Suponga que la función de utilidad de Pedro está dada por $U = \sqrt{w} - e$.

a) Si Pedro sólo puede ejercer e=0 o e=0.3. ¿Cuál es el nivel de esfuerzo que ejerce Pedro?

b) Suponga que Pedro está considerando comprar un seguro de incendio. El agente de seguros le explica que la compañía vende los seguros a un precio a. El contrato de seguro es tal que si la casa de Pedro se incendia la Compañía de Seguros le paga el valor de la casa menos un deducible de $D. Es decir, en caso de incendio la Compañía no le devuelve a Pedro el valor de la casa sino que $(300-D). El vendedor le explica a Pedro que la Compañía se ha visto en la necesidad de incluir un deducible en la póliza de seguros porque de otro modo, los asegurados no toman ninguna medida para evitar los incendios. Además, la Compañía no puede incluir en el contrato la obligación de tomar algunas medidas para evitar incendios porque esto no es verificable.

b.1) Demuestre que si las Compañías de Seguros no incluyen un deducible, el asegurado no tiene incentivo a esforzarse en evitar un incendio.

b.2) ¿Qué tipo de problema es este? ¿De riesgo moral o selección adversa? ¿Quién es el principal y quien es el agente? ¿Cuál es la preocupación del principal?

b.3) Dado el valor de la prima a. ¿Cuánto debiera ser el deducible para inducir al asegurado a ejercer un nivel de esfuerzo e=0.3?

b.4) Plantee el problema que resuelve la Compañía de Seguros para determinar el valor de la prima y del deducible. No es necesario que lo resuelva.

b.5) En la vida real, la mayor parte de los contratos de seguro contemplan algún deducible, por lo que el consumidor nunca está completamente asegurado. ¿Es esto eficiente? ¿Se puede concluir que los consumidores estarían mejor si la ley prohibiera cobrar deducibles?

w = depósito + valor casa = 100 + 300 = 400.

Prob(incendio / e=0)= $\frac{1}{2}$;   Prob(incendio / e=0.3)= $\frac{1}{5}$

a) Pedro ejercerá el nivel de esfuerzo que maximice su utilidad:

- Si e=0: $w = \begin{cases} 400 & con\ Pbb\ 1/2 \\ 100 & con\ Pbb\ 1/2 \end{cases}$

  Luego: $U = \frac{1}{2}\sqrt{400} + \frac{1}{2}\sqrt{100} - 0 = \frac{1}{2}(20+10) = 15$

- Si e=0.3: $w = \begin{cases} 400 & con\ Pbb\ 4/5 \\ 100 & con\ Pbb\ 1/5 \end{cases}$

  Luego: $U = \frac{1}{5}\sqrt{100} + \frac{4}{5}\sqrt{400} - 0.3 = 17{,}7$

  Por lo tanto, queda claro que Pedro ejercerá e=0.3.

b.1) Si el individuo compra el seguro y este no contempla deducible, tenemos que si la casa se incendia, la Compañía se Seguros le devuelve $300. Con ello vemos que la riqueza de Pedro sería siempre igual a 100+300- a , sin importar el nivel de esfuerzo.

$$U(e=0, seguro) = \frac{1}{2}\sqrt{400-a} + \frac{1}{2}\sqrt{400-a} - 0 = \sqrt{400-a}$$
$$U(e=0.3, seguro) = \frac{1}{5}\sqrt{400-a} + \frac{4}{5}\sqrt{400-a} - 0.3 = \sqrt{400-a} - 0.3$$

Luego, como $U(e=0, seguro) > U(e=0.3, seguro)$, entonces se concluye que Pedro no ejercería esfuerzo por evitar el incendio en este caso.

b.2) Si bien en todo seguro existe problema de riesgo moral y de selección adversa, en este caso, en particular, el problema relevante (y que se discute en el enunciado) es un problema de riesgo moral pues el principal (Compañía de Seguros) no observa el nivel de esfuerzo que ejerce el asegurado (agente) para evitar el incendio. La preocupación del principal es cómo hacer para que el agente ejerza el nivel "adecuado" de esfuerzo para evitar el incendio.

b.3) En este caso lo que necesitamos es que se cumpla la restricción de compatibilidad de incentivos (CI), de tal forma que Pedro ejercerá e=0.3 ssi:

$U(e=0.3, seguro) \geq U(e=0, seguro)$

Ahora, observando que la riqueza de Pedro cuando existe un deducible será:

$$w = \begin{cases} 400 - a & si\ no\ hay\ incendio \\ 400 - a - D & si\ hay\ incendio \end{cases}$$

$$U(e = 0.3, seguro) = \frac{1}{5}\sqrt{400 - a - D} + \frac{4}{5}\sqrt{400 - a} - 0.3$$

$$U(e = 0, seguro) = \frac{1}{2}\sqrt{400 - a - D} + \frac{1}{2}\sqrt{400 - a}$$

Entonces se debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{1}{5}\sqrt{400 - a - D} + \frac{4}{5}\sqrt{400 - a} - 0.3 \geq \frac{1}{2}\sqrt{400 - a - D} + \frac{1}{2}\sqrt{400 - a}$$

$$\Rightarrow \quad D \geq 2\sqrt{400 - a} - 1.$$

b.4) La Compañía de Seguros maximiza su utilidad dada por: $a - \frac{1}{5}(300 - D)$. Esto, sujeto a:

i. Restricción de participación: El asegurado compra el seguro ssi la utilidad con seguro es mayor que la utilidad sin seguro (valor que ya calculamos en la parte (a)).

$$\frac{1}{5}\sqrt{400 - a - D} + \frac{4}{5}\sqrt{400 - a} - 0.3 \geq 17{,}7$$

ii. Restricción de compatibilidad de incentivos: Que al asegurado le convenga escoger e=0.3.

Luego, el problema a resolver será:

$$\underset{a,D}{Máx}\ a - \frac{1}{5}(300 - D)$$

$$s.a.\quad \frac{1}{5}\sqrt{400 - a - D} + \frac{4}{5}\sqrt{400 - a} - 0.3 \geq 17{,}7 \qquad (R.P.)$$

$$\frac{1}{5}\sqrt{400 - a - D} + \frac{4}{5}\sqrt{400 - a} - 0.3 \geq \frac{1}{2}\sqrt{400 - a - D} + \frac{1}{2}\sqrt{400 - a} \qquad (R.C.I.)$$

b.5) Con el uso de un deducible no se está siendo lo más eficiente posible (desde el punto de vista social) porque el agente, que es averso al riesgo, está corriendo cierto riesgo (valga la redundancia) de perder parte de su riqueza. Lo eficiente sería que la parte que es neutra frente al riesgo lo asumiera de manera completa.

En cuanto a la segunda pregunta, el consumidor no necesariamente está mejor. El consumidor sabe que si no le cobran un deducible no tendrá incentivos a comportarse de manera ideal. Luego, la Compañía de Seguros podría no estar dispuesta a ofrecerle seguros o bien le podría cobrar una prima muy alta (y hay que notar que dicha prima se paga “a todo evento” mientras que el gasto por deducible se paga sólo si el evento ocurre, es decir, sólo si hay incendio).