Auxiliar 2 - IN51A
Otoño 2010

Profesores: Nicolás Figueroa, Ronald Fischer
Auxiliares: Manuel Marfán, Sebastián Vergara

Problema 1 *Juego del Ultimatum*

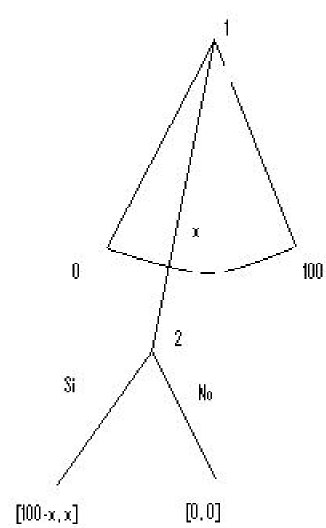
Este juego consiste en que el jugador 1 recibe 100 dolares y debe repartirlos entre él y el jugador 2, haciéndole una oferta a éste y el jugador 2 puede aceptar o rechazar la oferta. Si la oferta es rechazada, ningún jugador recibe dinero, y si la oferta es aceptada, el jugador 2 recibe lo que aceptó y el jugador 1 se queda con el resto de los 100 dolares.

a) Caracterice las estrategias de ambos jugadores.

b) Caracterice los equilibrios de Nash.

c) Encuentre el equilibrio perfecto en subjuegos.

Solución 1



a) Las estrategias son funciones que dada una historia determinan una acción en el conjunto de acciones de cada jugador. Definamos primero los conjuntos de acciones para cada jugador

$$S_1 = [0, 100] \qquad S_2 = \{Si, No\}$$

por lo que podemos definir las estrategias de la siguiente forma

$$s_1 : \{\emptyset\} \to [0, 100] \qquad s_2 : [0, 100] = S_1 \to \{Si, No\}$$

donde $\{\emptyset\}$ denota la historia inicial.

b) De la definición anterior de las estrategias de cada jugador, veamos que las siguientes estrategias conforman un equilibrio de Nash.

Sea $s_1(\emptyset) = x,\ x \in [0, 100]$ y sea $s_2(s_1) = \begin{cases} Si & si \quad s_1 \geq x \\ No & si \quad s_1 < x \end{cases}$

Es decir, el jugador 1 elige un valor en el intervalo $[0, 100]$ y el jugador 2 acepta la oferta si y solo si ésta es mayor o igual a x. Veremos que para cada jugador, su estrategia es óptima dado la estrategia del otro jugador.

Dada $s_2(s_1)$, si $s_1 < x$ el jugador 2 rechaza por lo que ambos jugadores ganan 0; si $s_1 > x$ el jugador 2 acepta, pero el jugador 1 no estaría optimizando, ya que si ofrece $s_1 = x$, el jugador 2 acepta denuevo, y el jugador 1 está ganando lo máximo posible. Por lo tanto la estrategia s_1 es óptima dada la estrategia s_2.

Para el jugador 2, dada la estrategia $s_1(s_2)$, si sube el umbral de aceptación (el valor x de su estrategia), acorde a su nueva estrategia 2 rechaza la oferta $s_1 = x$ de 1 y ambos ganan 0. Si mantiene su estrategia actual, 2 acepta la oferta y gana x; y si baja el umbral de aceptación, ante la oferta x seguirá aceptando, lo que lo mantiene en el mismo nivel de utilidad, por lo que no hay desviaciones beneficiosas para el jugador 2.

Como ningun jugador tiene incentivos a desviarse, se comprueba que los perfiles de estrategia $s = (s_1, s_2)$ con s_1, s_2 definidas al comienzo, son equilibrios de Nash $\forall x \in [0, 100]$

c) Para encontrar el EPS se debe resolver el juego por inducción inversa.

Dada una acción $s_1 = x$ en la primera etapa, el jugador 2 debe jugar la segunda etapa de forma óptima para que el subjuego sea un eq. de Nash. Si el jugador 2 decide rechazar la oferta, es decir, $s_2(x) = No$, su utilidad es 0, mientras que si acepta, $s_2(x) = Si$, su utilidad es x. Por lo tanto

$$s_2(x) = \begin{cases} Si & si \quad x \geq 0 \\ No & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Se asume que ante indiferencia, el jugador acepta.

Ahora, en la etapa 1, el jugador 1 elige cuanto ofrecer, claramente el óptimo para él es ofrecer $s_1 = 0$ ya que el jugador 2 acepta, $U_1(s_1, s_2) = 100$ y es óptimo para 1.

Por lo tanto, el EPS se escribe de la siguiente forma:

$$EPS = \{(s_1, s_2)\}$$

donde

$$s_1 = 0 \qquad s_2(x) = \begin{cases} Si & si \quad x \geq 0 \\ No & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Es importante recordar que el EPS es un plan contingente, es decir, determina la estrategia óptima para todas las situaciones en que a algun jugador le pueda tocar jugar. Es por esto que se debe explicitar la estrategia completa del jugador 2.

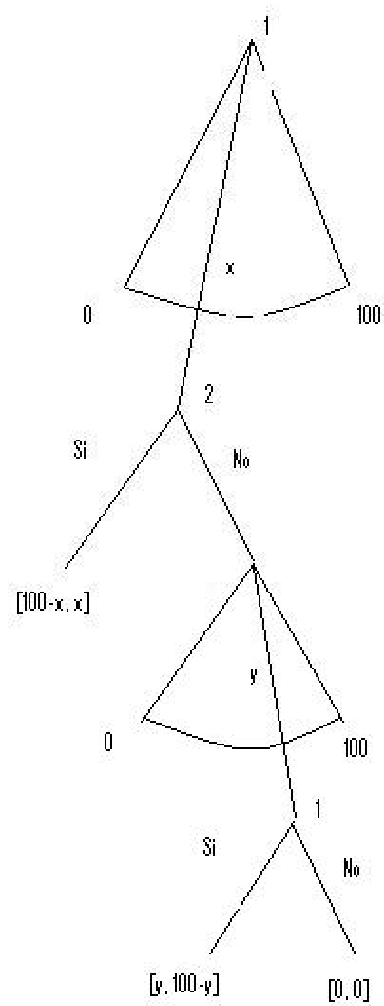
Problema 2 *Juego del Ultimatum en dos etapas*

Considere el mismo juego descrito en el problema anterior, pero ahora se le añade una etapa. Si el jugador 2 rechaza la oferta, éste puede realizar una contra oferta al jugador 1, y si éste acepta, se reparten el dinero dada la ultima oferta, y si rechaza, ningun jugador recibe dinero.

a) Caracterice las estrategias de ambos jugadores.

b) Caracterice el equilibrio perfecto en subjuegos.

Solución 2



a) La estrategia del jugador 1 es ahora un vector con dos componentes, una para cada instancia en la que le toca jugar: $s_1 = (s_1(\emptyset), s_1((x, No, y)))$; para el jugador 2 el tipo de estrategia se mantiene: $s_2 = s_2(x)$. Definimos los conjuntos de acciones entonces

$$S_1 = [0, 100] \times \{Si, No\}$$
$$S_2 = \{Si, No \wedge y \in [0, 100]\}$$

Con esto, las funciones de estrategia son (los superindices indican la componente del vector):

$${s_1}^1 : \{\emptyset\} \to [0, 100]$$
$${s_1}^2 : [0, 100] \times \{No\} \times [0, 100] \to \{Si, No\}$$
$$s_2 : [0, 100] \to S_2$$

b) (Supongamos nuevamente que ante indiferencias, prefieren aceptar y ademas prefieren que les acepten de inmediato) Resolvemos nuevamente por inducción inversa

Dada una historia (x,No,y) (historia necesaria para que se alcance la última etapa) el jugador 1 juega de forma óptima, por lo que es fácil ver que acepta cualquier oferta mayor o igual a 0, esto es

$$s_1(x, No, y) = \begin{cases} Si & si \quad y \geq 0 \\ No & si \quad y < 0 \end{cases}$$

Ahora en la etapa 2, el jugador 2, dada la historia $s_1(\emptyset) = x$, debe jugar óptimamente conociendo la continuación del juego (lo que juega 1 tras su jugada). Si 2 acepta la oferta x su utilidad es precisamente $U_2(s_2, s_1) = x$. Si decide rechazar y hacer una contraoferta, jugando óptimamente ofrece la menor cantidad posible tal que el jugador 1 acepte, ya que si éste no acepta, gana 0 que es claramente peor que x para todo $x > 0$ (Si $x = 0$ claramente es mejor rechazar que aceptar). El jugador 2 sabe que el 1 acepta cualquier oferta mayor o igual a 0, por lo que en este caso, ofreceria $s_2(x) = 0$ y $U_2(0, s_1) = 100 > x$, por lo tanto la estrategia óptima del jugador 2 es

$$s_2(x) = \begin{cases} Si & si \quad x = 100 \\ No \wedge y = 0 & si \quad x < 100 \end{cases}$$

Ahora, el jugador 1 nuevamente debe jugar óptimamente conociendo cuáles son las decisiones futuras. Si su oferta es menor que 100, ie. $s_1(\emptyset) = x$ con $x < 100$, entonces el jugador 2 rechaza la oferta y contraofrece $y = 0$ tras lo cual el jugador 1 acepta y su utilidad es 0. Si ofrece $x = 100$, el jugador 2 acepta y $U_1(s_1, s_2) = 0$ pero por suposición dijimos que ante indiferencias prefieren aceptar y prefieren que les acepten, por lo que la estrategia óptima en esta etapa para el jugador 1 es

$$s_1(\emptyset) = 100$$

Por lo tanto, el EPS se puede escribir como

$$EPS = \{((s_1(\emptyset), s_1((x, No, y))), s_2(x))\}$$

con $s_1(\emptyset), s_1((x, No, y)), s_2(x)$ definidas anteriormente.

Problema 3 *Spoiled child*

Considere a un padre y su hijo que juegan el siguiente juego: el hijo elige primero una acción A, que le produce un ingreso $I_H(A)$, y al padre le produce un ingreso $I_P(A)$. Luego, el padre observa los ingresos $I_H(A)$ y $I_P(A)$ y elige un legado B para dejarle al hijo. El pago para el hijo es $U(I_H + B)$ y el pago del padre es $V(I_P - B) + kU(I_H + B)$, donde $k > 0$ refleja la preocupación del padre por el bienestar del hijo. Se asume que $A \geq 0$ y B puede ser tanto negativo como positivo. Las funciones U y V son crecientes y estrictamente cóncavas, y las funciones $I_H(A)$ y $I_P(A)$ son estrictamente cóncavas y se maximizan para $A_H \geq 0$ y $A_P \geq 0$ respectivamente.

a) Encuentre las ecuaciones que determinan el equilibrio perfecto en subjuegos.

b) Demueste que la acción que elige el hijo, es la misma que eligiría un planificador social para maximizar el ingreso conjunto $I_H(A) + I_P(A)$.

Solución 3

a) Resolvemos el juego por inducción inversa, por lo que partimos de la segunda etapa en la que el padre elige la acción B. Como el padre es un agente racional, éste busca optimizar su utilidad, por lo que resuelve (considerando que el hijo eligió la acción A

$$\max_B V(I_P(A) - B) + kU(I_H(A) + B)$$

De la condición de primer orden se obtiene

(1)
$$-V'(I_P(A) - B) + kU'(I_H(A) + B) = 0$$

Esta ecuación determina la función de mejor respuesta del padre ante la acción del hijo. Con esta información, el hijo resuelve en la primera etapa, en la que maximiza su utilidad, es decir

$$\max_A U(I_H(A) + B(A))$$

La condición de primer orden implica que

(2)
$$U'(I_H(A) + B(A))[I'_H(A) + B'(A)] = 0$$

Necesitamos saber cómo cambia la acción B con respecto a A, es decir, necesitamos $B'(A)$, la que podemos obtener derivando implicitamente (1):

$$-V''(I_P(A) - B(A))[I'_P(A) - B'(A)] + kU''(I_H(A) + B)[I'_H(A) + B'(A)] = 0$$

Despejando $B'(A)$ se obtiene

$$B'(A) = \frac{I'_P(A)V''(I_P(A) - B(A)) - I'_H(A)kU''(I_H(A) + B(A))}{V''(I_P(A) - B(A)) + kU''(I_H(A) + B(A))}$$

Ahora reemplazando $B'(A)$ en (2), podemos obtener una expreción de la cual es posible despejar A

$$U'(I_H(A) + B(A)) \left[\frac{(I'_H(A) + I'_P(A))V''(I_P(A) - B(A))}{V''(I_P(A) - B(A)) + kU''(I_H(A) + B(A))} \right] = 0$$

Con esto, tenemos dos ecuaciones y dos incognitas, que nos determinan el equilibrio perfecto en subjuegos.

b) Para probar que la acción optima del hijo maximiza a su vez el ingreso conjunto del padre y el hijo, $I_H(A) + I_P(A)$, basta con observar la última relación obtenida. Para que esta última expresión sea igual a cero, se debe cumplir que alguno de los 3 terminos en el numerador sea nulo.

- $U'(I_H(A) + B(A)) > 0$ ya que la función $U(\cdot)$ es creciente.
- $V''(I_P(A) - B(A)) < 0$ ya que la función $V(\cdot)$ es estrictamente cóncava.

Por lo tanto, se debe cumplir necesariamente que $I'_H(A) + I'_P(A) = 0$, que es precisamente la condición de primer orden para maximizar el ingreso conjunto, y como las funciones $I_H(A), I_P(A)$ son estrictamente cóncavas, la suma también es cóncava y por lo tanto el máximo es único y la acción A que maximiza el ingreso conjunto coincide entonces con la acción A que maximiza la utilidad indiviual del hijo.

Lo interesante del problema es que a pesar de que el hijo no tiene ninguna preocupación por el bienestar del padre, la acción óptima para él, es también la acción socialmente óptima.

De la misma forma se puede demostrar que la acción óptima A maximiza también la utilidad conjunta del padre y el hijo $[U(I_H(A) + B(A)) + V(I_P(A) - B(A)) + kU(I_H(A) + B(A))]$.