

Auxiliar 1 - IN51A

Otoño 2010

Profesores: Nicolás Figueroa, Ronald Fischer
 Auxiliares: Manuel Marfán, Sebastián Vergara

Problema 1 *Eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas*

Considere el siguiente juego, encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas, utilizando el metodo de eliminacion iterada de estrategias estrictamente dominadas.

		Jugador 2				
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Jugador 1	s_1	4, 1	2, 1	3, 1	5, 2	3, 3
	s_2	3, 6	3, 4	4, 3	1, 2	2, 1
	s_3	2, 3	4, 3	5, 6	3, 5	2, 2
	s_4	3, 2	6, 4	2, 3	4, 5	2, 4
	s_5	5, 2	4, 2	6, 1	4, 3	3, 2

Solución 1

Recordemos que una estrategia s_i es estrictamente dominada por una estrategia s'_i , si $U_1(s_i, t_i) < U_1(s'_i, t_i) \forall t_i$. Análogo para el jugador 2.

Dado lo anterior, podemos notar que s_5 domina estrictamente a s_2 , por lo que eliminamos la estrategia s_2 , y el juego queda de la siguiente forma:

		Jugador 2				
		t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
Jugador 1	s_1	4, 1	2, 1	3, 1	5, 2	3, 3
	s_3	2, 3	4, 3	5, 6	3, 5	2, 2
	s_4	3, 2	6, 4	2, 3	4, 5	2, 4
	s_5	5, 2	4, 2	6, 1	4, 3	3, 2

Ahora vemos que t_4 domina estrictamente a t_2 para el jugador 2, por lo que eliminamos t_2 y el juego queda así:

		Jugador 2			
		t_1	t_3	t_4	t_5
Jugador 1	s_1	4, 1	3, 1	5, 2	3, 3
	s_3	2, 3	5, 6	3, 5	2, 2
	s_4	3, 2	2, 3	4, 5	2, 4
	s_5	5, 2	6, 1	4, 3	3, 2

Vemos que s_1 domina estrictamente a s_4 y que s_5 domina estrictamente a s_3 , por lo que eliminamos ambas estrategias y el juego queda así:

		Jugador 2			
		t_1	t_3	t_4	t_5
Jugador 1	s_1	4, 1	3, 1	5, 2	3, 3
	s_5	5, 2	6, 1	4, 3	3, 2

Finalmente, t_4 domina estrictamente a t_3 y a t_1 , por lo que el juego queda asi:

		Jugador 2	
		t_4	t_5
Jugador 1	s_1	5, 2	3, 3
	s_5	4, 3	3, 2

Ahora que no quedan mas estrategias estrictamente dominadas para ningun jugador, podemos resolver el nuevo juego, el cual es equivalente al inicial, pero mas simple.

Para encontrar los equilibrios, calculamos las funciones de mejor respuesta de cada jugador usando la utilidad esperada.

Sea p la probabilidad con que el jugador 1 juega la estrategia s_1 y q la probabilidad con que el jugador 2 juega la estrategia t_4 .

$$U_1(p, q) = p(5q + 3 - 3q) + (1 - p)(4q + 3 - 3q)$$

$$U_1(p, q) = p(3 + 2q) + (1 - p)(3 + q)$$

$$U_1(p, q) = p(q) + (3 + q)$$

Con esto, la funcion de mejor respuesta del jugador 1 es:

$$Br_1(q) = \begin{cases} p = 1 & si \quad q > 0 \\ p \in [0, 1] & si \quad q = 0 \end{cases}$$

Analogamente para el jugador 2:

$$U_2(p, q) = q(2p + 3 - 3p) + (1 - q)(3p + 2 - 2p)$$

$$U_2(p, q) = q(3 - p) + (1 - q)(2 + p)$$

$$U_2(p, q) = q(1 - 2p) + (2 + p)$$

Con esto, la funcion de mejor respuesta del jugador 2 es:

$$Br_2(p) = \begin{cases} q = 1 & si \quad p < 1/2 \\ q \in [0, 1] & si \quad p = 1/2 \\ q = 0 & si \quad p > 1/2 \end{cases}$$

Los equilibrios seran aquellos en que las mejores respuestas se induzcan mutuamente, es decir, los perfiles (σ_1^*, σ_2^*) tal que:

$$Br_i(Br_{-i}(\sigma_i^*)) = \sigma_i^* \quad \forall i$$

Por lo tanto, se verifica facilmente que los siguientes perfiles son equilibrios de Nash:

$$EN_{puros} = \{(s_1, t_5)\}$$

$$EN_{mixtos} = \{((p, 1-p), (0, 1)) \mid p \in (1/2, 1]\}$$

Problema 2

Dos jugadores, 1 y 2, deben repartirse \$100 dolares, para lo cual cada jugador debe elegir una cantidad. Si las cantidades de ambos jugadores sumadas superan los \$100 dolares, ningun jugador recibe parte del dinero, y si la suma es menor o igual a \$100 cada jugador recibe lo que elige. Asuma solo cantidades naturales.

Pruebe que los equilibrios de Nash son de la forma $s_i + s_j = 100$ donde s_i, s_j son las elecciones de cada jugador.

Solucion 2

Para probar que estos son los unicos equilibrios, analicemos los distintos casos y veamos que no son eq. de Nash, y luego veremos que no existen desviaciones unilaterales para el caso en que la suma es 100. (Los jugadores son analogos por lo que el desarrollo se hara para un solo jugador)

La utilidad de cada jugador se puede caracterizar de la siguiente forma:

$$U_i(s_i, s_j) = \begin{cases} s_i & \text{si } s_i + s_j \leq 100 \\ 0 & \text{si } s_i + s_j > 100 \end{cases}$$

- Caso 1: $s_i + s_j < 100$

Para ver que no son eq. de Nash, veamos que existen desviaciones unilaterales para almenos uno de los jugadores.

Sea $s'_i = s_i + 1$ una desviacion por el jugador i , se verifica que $s'_i + s_j \leq 100$ y por lo tanto se tiene que $U_i(s'_i, s_j) = s'_i = s_i + 1 > s_i = U_i(s_i, s_j)$ por lo que la desviacion s'_i es una desviacion que le produce beneficios al jugador i , y por ende, este caso no puede ser eq. de Nash.

- Caso 2: $s_i + s_j > 100$

En este caso $U_i(s_i, s_j) = 0$, si definimos $s'_i = 100 - s_j$ se verifica que $s'_i + s_j = 100 - s_j + s_j = 100$ por lo que $U_i(s'_i, s_j) = s'_i > 0$. Nuevamente hemos encontrado una desviacion benefeciosa para el jugador i , por lo que este caso no puede ser eq. de Nash.

- Caso 3: $s_i + s_j = 100$

Para este caso mostraremos que no existen desviaciones unilaterales beneficiosas para ningun jugador.

Sea $s'_i = s_i + 1$ una desviacion para el jugador i (esta es la menor desviacion posible hacia arriba). $s'_i + s_j = s_i + 1 + s_j = 101$ por lo que $U_i(s'_i, s_j) = 0 < s_i = U_i(s_i, s_j)$. Esto muestra que incluso la menor desviacion hacia arriba empeora la situacion del jugador i , por lo que no es una desviacion benefica.

Sea ahora $s'_i = s_i - 1$ la menor desviacion hacia abajo. $s'_i + s_j = s_i - 1 + s_j = 99$ y $U_i(s'_i, s_j) = s'_i = s_i - 1 < s_i = U_i(s_i, s_j)$. Nuevamente vemos que esta desviacion no es benefica para el jugador i .

Hemos mostrado que para este caso, no existen desviaciones unilaterales que mejoren la situacion de alguno de los jugadores, por lo que ningun jugador tiene incentivos a desviarse de este perfil de estrategias, lo que es precisamente el concepto de equilibrio de Nash.

Problema 3

Considere que existen I ganaderos. Cada ganadero lleva a pastar a sus animales (vacas) a un predio cercano (el predio es comun para todos los ganaderos). Denotaremos n_i el numero de animales que posee el ganadero i . El costo de comprar un animal es constante e igual a c . El valor de venta de cada animal, cuando en el predio hay $N = \sum_{i \in I} n_i$, es $V(N) = \frac{A}{N}$, $A > 0$. Se sabe que $V(\cdot) > 0$, $V'(\cdot) < 0$.

Encuentre e interprete la condicion que determina el numero optimo de vacas que tiene cada ganadero. (Hint: Usted esta buscando el equilibrio de Nash)

Solucion 3

Cada ganadero es un agente racional, por lo que maximiza su funcion de utilidad, la que viene naturalmente dada por:

$$U_i(n_i, n_{-i}) = n_i V \left(\sum_{j \neq i} n_j + n_i \right) - cn_i \quad \forall i$$

La condicion de primer orden es:

$$\frac{\partial U_i}{\partial n_i}(n_i, n_{-i}) = V \left(\sum_{j \neq i} n_j + n_i \right) + n_i \frac{\partial V}{\partial n_i} \left(\sum_{j \neq i} n_j + n_i \right) - c = 0 \quad \forall i$$

Aplicando la forma funcional de $V(\cdot)$

$$\frac{\partial U_i}{\partial n_i}(n_i, n_{-i}) = \frac{A}{\left(\sum_{j \neq i} n_j + n_i \right)} - n_i \frac{A}{\left(\sum_{j \neq i} n_j + n_i \right)^2} - c = 0 \quad \forall i$$

Como la funcion $V(\cdot)$ y los costos marginales c son comunes para todos los ganaderos, en el equilibrio, la cantidad de animales va a ser la misma para cada ganadero, ie. $n_j = n_i \quad \forall j$. La C.P.O queda entonces:

$$\frac{\partial U_i}{\partial n_i}(n_i, n_{-i}) = \frac{A}{In_i} - n_i \frac{A}{(In_i)^2} - c = 0 \quad \forall i$$

Despejando n_i se obtiene

$$n_i = \frac{A(I-1)}{cI^2} \quad \forall i$$