# Fundamentos de Investigación de Operaciones
# El Problema de Transporte

15 de mayo de 2004

*El Problema de Transporte corresponde a un tipo particular de un problema de programación lineal. Si bien este tipo de problema puede ser resuelto por el método Simplex, existe un algoritmo simplificado especial para resolverlo.*

## 1. Formulación del Problema de Transporte

### 1.1. Ejemplo de Formulación

A modo de ejemplo, construyamos el modelo de programación lineal para el siguiente problema.

**Ejemplo 1** *Una empresa energética dispone de tres plantas de generación para satisfacer la demanda eléctrica de cuatro ciudades. Las plantas 1, 2 y 3 pueden satisfacer 35, 50 y 40 millones de [kWh] respectivamente. El valor máximo de consumo ocurre a las 2 PM y es de 45, 20, 30 y 30 millones de [kWh] en las ciudades 1, 2, 3 y 4 respectivamente. El costo de enviar 1 [kWh] depende de la distancia que deba recorrer la energía. La siguiente tabla muestra los costos de envío unitario desde cada planta a cada ciudad. Formule un modelo de programción lineal que permita minimizar los costos de satisfacción de la demanda máxima en todas las ciudades.*

| | *Hacia* | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| *Desde* | *Ciudad 1* | *Ciudad 2* | *Ciudad 3* | *Ciudad 4* | *Oferta (Millones kWh)* |
| *Planta 1* | *8* | *6* | *10* | *9* | *35* |
| *Planta 2* | *9* | *12* | *13* | *7* | *50* |
| *Planta 3* | *14* | *9* | *16* | *5* | *40* |
| *Demanda (Millones kWh)* | *45* | *20* | *30* | *30* | |

En primer lugar debemos definir las variables de decisión necesarias para representar las posibles decisiones que puede tomar la empresa energética . En este caso, corresponde a la cantidad de energía que se debe enviar desde cada planta a cada ciudad, luego para $i = 1 \ldots 3$ y $j = 1 \ldots 4$ :

$$x_{ij} = \text{número de millones de [kWh] producidos en la planta } i \text{ enviadas a ciudad } j \tag{1.1}$$

En términos de éstas variables, el costo total de entregar energía a todas las ciudades es:

$$
\begin{array}{ll}
8x_{11}+6x_{12}+10x_{13}+9x_{14} & \text{(Costo de enviar energía desde la Planta 1)} \\
+9x_{21}+12x_{22}+13x_{23}+7x_{24} & \text{(Costo de enviar energía desde la Planta 2)} \\
+14x_{31}+9x_{32}+16x_{33}+5x_{34} & \text{(Costo de enviar energía desde la Planta 3)}
\end{array} \tag{1.2}
$$

El problema tiene dos tipos de restricciones. En primer lugar, la energía total suministrada por cada planta no puede exceder su capacidad. En este caso se habla de restricciones de *oferta o suministro*. Como existen tres *puntos de oferta o sumistro*, existen tres restricciones:

$$
\begin{array}{rcll}
x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} & \leq & 35 & \text{(Restricción de oferta de la Planta 1)} \\
x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} & \leq & 50 & \text{(Restricción de oferta de la Planta 2)} \\
x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} & \leq & 40 & \text{(Restricción de oferta de la Planta 3)}
\end{array} \tag{1.3}
$$

En segundo lugar, se deben plantear las restricciones que permitan asegurar que se satisfaga la demanda en las cuatro ciudades. Así, las *restricciones de demanda* para cada *punto de demanda* quedan:

$$
\begin{array}{rcll}
x_{11}+x_{21}+x_{31} & \geq & 45 & \text{(Restricción de demanda de la Ciudad 1)} \\
x_{12}+x_{22}+x_{32} & \geq & 20 & \text{(Restricción de demanda de la Ciudad 2)} \\
x_{13}+x_{23}+x_{33} & \geq & 30 & \text{(Restricción de demanda de la Ciudad 3)} \\
x_{14}+x_{24}+x_{34} & \geq & 30 & \text{(Restricción de demanda de la Ciudad 4)}
\end{array} \tag{1.4}
$$

Evidentemente, cada $x_{ij}$ debe ser no negativo, por lo tanto se agregan las restricciones $x_{ij} \geq 0$ donde $i = 1 \ldots 3$ y $j = 1 \ldots 4$. Más adelante demostraremos que la solución de este problema es $z = 1020$, $x_{12} = 10$, $x_{13} = 25$, $x_{21} = 45$, $x_{23} = 5$, $x_{32} = 10$ y $x_{34} = 30$. El resto de las variables vale cero.

Por otro lado, es posible construir una representación gráfica del problema (figura 1.1).

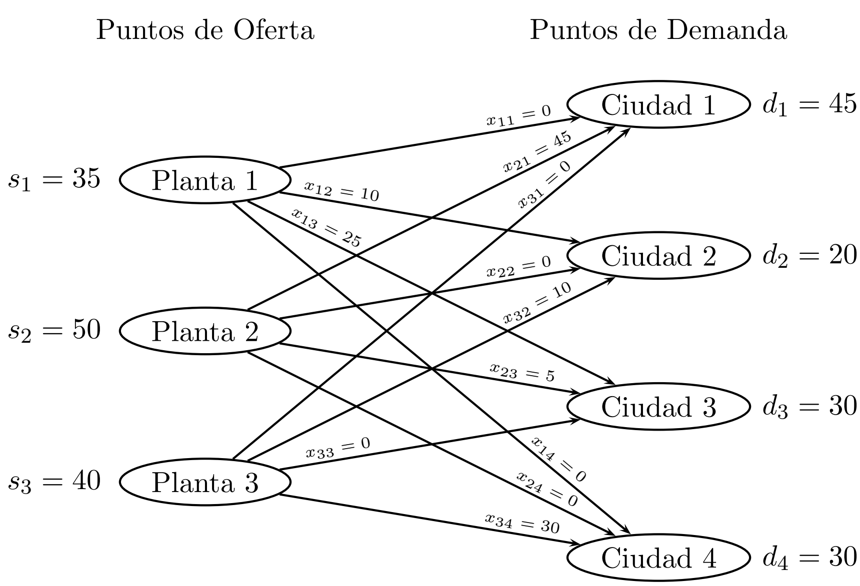



Figura 1.1: Representación gráfica del problema

### 1.2. Formulación General

Un problema de transporte queda definido por la siguiente información:

1. Un conjunto de $m$ puntos de oferta. Cada punto de oferta $i$ tiene asociado una oferta $s_i$.
2. Un conjunto de $n$ puntos de demanda. Cada punto de demanda $j$ tiene asociada una demanda $d_j$.
3. Cada unidad enviada desde un punto de oferta $i$ a un punto de demanda $j$ tiene un costo unitario de transporte $c_{ij}$

Consideremos:

$$x_{ij} \quad = \quad \text{número de unidades enviadas desde el punto de oferta } i \text{ al punto de demanda } j \tag{1.5}$$

Luego, la formulación general del problema de transporte queda:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Min} & \sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n} c_{ij}x_{ij} & & & \\
\text{st} & & & & \\
\sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} & \leq & s_i & (i = 1 \dots m) & \text{(Restricciones de oferta)} \\
\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} & \geq & d_j & (j = 1 \dots n) & \text{(Restricciones de demanda)} \\
x_{ij} & \geq & 0 & (i = 1 \dots m;\ j = 1 \dots n) & \text{(Restricciones de signo)}
\end{array} \tag{1.6}$$

Si se satisface:

$$\sum_{i=1}^{i=m} s_i = \sum_{j=1}^{j=n} d_j \tag{1.7}$$

se dice que el problema está *balanceado*. En el caso del ejemplo anterior, se verifica que tando la suma de ofertas como las de las demandas es igual a 125. En el caso de un problema de transporte balanceado todas las restricciones estarán al límite, por lo tanto la formulación queda:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Min} & \sum_{i=1}^{i=m}\sum_{j=1}^{j=n} c_{ij}x_{ij} & & & \\
\text{st} & & & & \\
\sum_{j=1}^{j=n} x_{ij} & = & s_i & (i = 1 \dots m) & \text{(Restricciones de oferta)} \\
\sum_{i=1}^{i=m} x_{ij} & = & d_j & (j = 1 \dots n) & \text{(Restricciones de demanda)} \\
x_{ij} & \geq & 0 & (i = 1 \dots m;\ j = 1 \dots n) & \text{(Restricciones de signo)}
\end{array} \tag{1.8}$$

### 1.3. Problemas de Transporte no Balanceados

Si la oferta total supera a la demanda total, se puede balancear el problema de transporte incorporando un *punto de demanda artificial o dummy* que tenga como demanda el excedente de oferta del problema. Como las asignaciones al punto artificial no son reales, se le asigna un costo unitario de cero. En general, el costo unitario no necesariamente debe ser igual a cero, basta co que tenga igual valor a todos los puntos de oferta disponibles de forma de no generar preferencias. Por simplicidad, se prefiere emplear cero. Para ilustrar el balanceo de un problema no balanceado, supongamos en el ejemplo anterior que la demanda de la ciudad 1 disminuye a 40 [kWh]. La Figura 1.2 ilustra la incoporación del punto de demanda artificial y entrega la solución respectiva.

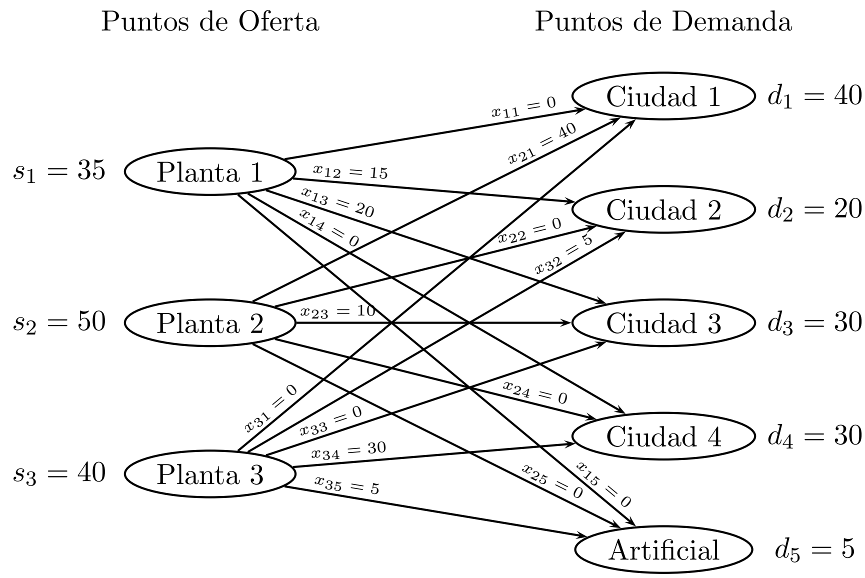



Figura 1.2: Representación gráfica del problema no balanceado

Una forma más práctica de representar un problema de transporte es mediante un *tableau de transporte*. Una celda de la fila $i$ y la columna $j$ representa la variable $x_{ij}$. Se suele incorporar en la esquina superior derecha de cada celda, el costo unitario $c_{ij}$ de la combinación $i-j$. En general, el tableau queda:

| | | | | | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| | $c_{11}$ | $c_{12}$ | $\cdots$ | $c_{1n}$ | $s_1$ |
| | $c_{21}$ | $c_{22}$ | $\cdots$ | $c_{2n}$ | $s_2$ |
| | $\vdots$ | $\vdots$ | | $\vdots$ | $\vdots$ |
| | $c_{m1}$ | $c_{m2}$ | $\cdots$ | $c_{mn}$ | $s_m$ |
| Demanda | $d_1$ | $d_2$ | $\cdots$ | $d_n$ | |

Construyendo el tableau para el ejemplo anterior (caso balanceado), introduciendo la solución óptima, se tiene:

| | Ciudad 1 | Ciudad 2 | Ciudad 3 | Ciudad 4 | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 10 | 9 | |
| Planta 1 | | 10 | 25 | | 35 |
| | 9 | 12 | 13 | 7 | |
| Planta 2 | 45 | | 5 | | 50 |
| | 14 | 9 | 16 | 5 | |
| Planta 3 | | 10 | | 30 | 40 |
| Demanda | 45 | 20 | 30 | 30 | |

En este caso se puede verificar que el problema está balanceado comprobando que la suma de la última columna y la suma de la última de la fila es idéntica.

Así como un problema de transporte puede no estar balanceado cuando la demanda es inferior a la oferta, también es posible que la demanda supere a la oferta. En este caso, se recurre a un punto de oferta artificial con valor de oferta equivalente a la diferencia entre oferta y demanda, de modo de balancear el problema. En la mayoría de las situaciones, el hecho de no satisfacer totalmente la demanda puede significar algún tipo de costo. Por lo tanto, en éstos casos el costo unitario de las casillas ficticias suele no ser cero y puede variar de un punto de demanda a otro.

# 2. Resolución del Problema de Transporte

## 2.1. Solución Inicial

Consideremos un problema de transporte balanceado con $m$ puntos de oferta y $n$ puntos de demanda. De acuerdo a la formulación vista anteriormente, el problema tendrá $m + n$ restricciones de igualdad.

Para proceder a describir algunos métodos para encontrar una primera solución inicial, es importante observar que si un conjunto de valores para las variables $x_{ij}$ satisface todas las restricciones salvo una, automáticamente satisface la otra restricción. Por ejemplo consideremos que en el ejemplo anterior se sabe que los valores de las varibles satisfacen todas las restricciones, salvo la primera restricción de oferta. Por lo tanto, los valores de las $x_{ij}$ satisfacen $d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 125$ millones de [kWh] y proveen $s_2 + s_3 = 125 - s_1 = 90$ millones de [kWh] de las plantas 2 y 3. Por lo tanto, la planta 1 debe proveer $125 - (125 - s_1) = 35$ millones de [kWh], luego los valores de $x_{ij}$ también satisfacen la primera restricción de oferta.

En lo sucesivo, para resolver el problema de transporte, consideraremos que se satisfacen $m+n-1$ restricciones, omitiendo alguna. En forma arbitraria, omitiremos la primera restricción de oferta. Evidentemente, cualquier colección de $m+n-1$ variables no necesariamente es una solución factible para el problema.

Consideremos el siguiente problema de transporte (omitiremos los costos unitarios):

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | 4 |
| | | | 5 |
| 3 | 2 | 4 | |

En forma matricial, las restricciones del problema de transporte balanceado anterior puede ser escrito de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

Eliminando la primera restricción de oferta el sistema se reduce a:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

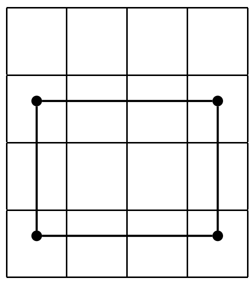
Como el sistema anterior tiene 4 restricciones y 6 variables posee infinitas soluciones, sin embargo, siempre tendrá como solución al menos 4 variables no nulas.

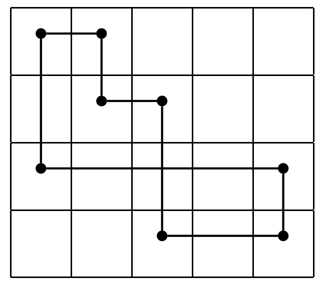
Para obtener una solución básica factible en forma simple introduciremos el concepto de *loop*.

**Definición 1** *Un orden secuencial de al menos cuatro celdas distintas se denomina loop si:*

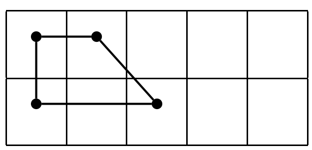
1. *Dos celdas consecutivas están en la misma columna o en la misma fila.*
2. *No tiene tres celdas consecutivas en una misma columna o en una misma fila.*
3. *La última celda de la secuencia tiene una fila o columna común con la primera celda de la secuencia.*

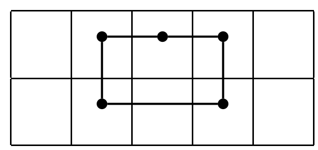
Las figuras siguientes muestran algunos tipos de loop en dos tableaux de transporte:





Las siguientes figuras muestran algunos ejemplos de secuencias de celdas que no conforman un loop, pues no satisfacen todas las condiciones.





**Teorema 1** *En un problema de transporte balanceado con $m$ puntos de oferta y $n$ puntos de demanda, las celdas correspondientes a un conjunto de $m + n - 1$ variables no contienen un loop sí y sólo sí las $n + m - 1$ variables constituyen una solución inicial.*

El teorema anterior se desprende del hecho de que en un conjunto de $m+n-1$ celdas no contienen un loop sí y sólo sí las $m+n-1$ columnas correspondientes a las celdas son linealmente independientes.

Los métodos más empleados para obtener soluciones iniciales son:

- El método de la Esquina Noroeste.
- El método del Costo Mínimo.
- El método de Vogel.

A continuación revisaremos sólo el método de la Esquina Noroeste y el de Vogel.

<u>Método de la Esquina Noroeste.</u>

Para encontrar una solución inicial se comienza por la esquina superior izquierda (noroeste) del tableau de transporte intentando asignar la máxima cantidad posible a $x_{11}$. Evidentemente, el valor máximo de $x_{11}$ debe ser el menor entre $s_1$ y $d_1$. Si $x_{11} = s_1$, se puede descartar la primera fila pues ya no podrá asignarse más desde el primer punto de oferta, se avanza a la siguiente fila. Al mismo tiempo, se debe cambiar $d_1$ por $d_1 - s_1$, de forma de indicar la cantidad de demanda no satisfecha en el primer punto de demanda. En caso que $x_{11} = d_1$, se debe descartar la primera columna y cambiar $s_1$ por $s_1 - d_1$, avanzando una columna. Si $x_{11} = d_1 = s_1$, se debe avanzar en una columna o en una fila (pero no en ambas). Se asigna un cero en la dirección escogida y se descarta la otra alternativa. El método continúa aplicando el mismo criterio desde la esquina noroeste del tableau restante. Una vez que están asignadas toda de demanda y oferta disponible, se terminan las asignaciones y está completa la asignación inicial.

Apliquemos el método al siguiente tableau (notar que no se incorporan los costos pues el método no los emplea):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | 5 |
| | | | | 1 |
| | | | | 3 |
| 2 | 4 | 2 | 1 | |

Comenzamos asignando la máxima cantidad posible por fila o por columna en la esquina noroeste. En este caso, controla la primera columna, luego:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | | | | 3 |
| × | | | | 1 |
| × | | | | 3 |
| 0 | 4 | 2 | 1 | |

A continuación, avanzamos una columna y en esta celda controla la fila, por lo tanto queda:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | × | × | 0 |
| × | | | | 1 |
| × | | | | 3 |
| 0 | 1 | 2 | 1 | |

En este caso, la esquina más noroeste disponible es la celda 2-2. Aquí, la demanda y la oferta se igualan. Arbitrariamente se escogerá la celda inferior de la misma columna para asignar un cero:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | × | × | 0 |
| × | 1 | × | × | 0 |
| × | 0 | | | 3 |
| 0 | 0 | 2 | 1 | |

Luego, la celda más noroeste disponible es la 3-3. En esta celda, controla la demanda de 2 sobre la oferta de 3, luego:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | × | × | 0 |
| × | 1 | × | × | 0 |
| × | 0 | 2 | | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | |

Finalmente, se completa el tableau haciendo la última asignación factible:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | × | × | 0 |
| × | 1 | × | × | 0 |
| × | 0 | 2 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | |

En el tableau final se puede verificar las $m+n-1$ asignaciones. Además se observa que la secuencia de celdas no no conforman ningún loop, por lo tanto, de acuerdo al teorema corresponde a una asignación inicial factible.

<u>Método de Vogel.</u>

El método comienza calculando por cada columna y por cada fila el *castigo* o *penalty*. El castigo se calcula como la diferencia entre los dos *costos menores* en la columna o en la fila según corresponda. A continuación, se determina la fila o columna con un mayor valor de castigo. Luego, se selecciona como variable basal la celda con menor costo de la fila o columna, según corresponda, y se le asigna la máxima cantidad posible. Una vez realizada la asignación, se descarta la fila o columna cuya oferta o demanda haya sido completa. Se recalcula la demanda u oferta disponible en la fila o columna. La primera asignación se ha completado.

Se vuelven a calcular los castigos por fila y por columna y se repite el procedimiento descrito hasta completar las asignaciones posibles en el tableau.

La ventaja del método de Vogel por sobre el de la Esquina Noroeste es que va adelante algunas iteraciones y por lo tanto se obtiene una solución inicial mejor. Eventualmente puede ocurrir que aplicando el método se llegue directamente a la solución óptima. La desventaja del método de Vogel radica en que sin duda es más complejo que el de la esquina noroeste, por lo tanto es más difícil de implementar y más proclive a errores en la aplicación.

Para ilustrar la aplicación del método veamos un ejemplo. Consideremos el siguiente tableau de transporte:

| | | | | Oferta |
|---|---|---|---|---|
| | 6 | 7 | 8 | 10 |
| | 15 | 80 | 78 | 15 |
| Demanda | 15 | 5 | 5 | |

De acuerdo al método, en primer lugar se calculan los castigos por fila y por columna:

| | | | | Oferta | Castigo |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 7 | 8 | 10 | $7-6=1$ |
| | 15 | 80 | 78 | 15 | $78-15=63$ |
| Demanda | 15 | 5 | 5 | | |
| Castigo | 9 | 73 | 70 | | |

El mayor castigo entre filas y columnas se encuentra en la segunda columna. De ambas celdas, la de mínimo costo es la de costo unitario de 7, buscando la máxima asiganción por fila y por columna controla la columna con una signación máxima de 5 unidades.

| | | | | Oferta | Castigo |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 7 | 8 | | |
| | | 5 | | 5 | $8-6=2$ |
| | 15 | 80 | 78 | | |
| | | × | | 15 | $78-15=63$ |
| Demanda | 15 | 0 | 5 | | |
| Castigo | 9 | - | 70 | | |

De los castigos recalculados, el mayor corresponde a la tercera columna. En este caso la celda de menor costo es la de la primera fila. Verificando la asignación máxima por fila y por columna, controla la fila con una asignación máxima de 5 unidades.

| | | | | Oferta | Castigo |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 7 | 8 | | |
| | | 5 | 5 | 0 | - |
| | 15 | 80 | 78 | | |
| | | × | × | 15 | - |
| Demanda | 15 | 0 | 0 | | |
| Castigo | 9 | - | - | | |

Luego, el único castigo disponible (y por lo tanto el mayor) corresponde a la primera columna. En este caso, el mínimo costo corresponde a la primera fila. La máxima cantidad posible a asignar por columna es 15, pero por fila es 0. Por lo tanto, debemos asignar 0 unidades a la celda de menor costo.

| | | | | Oferta | Castigo |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 7 | 8 | | |
| | 0 | 5 | 5 | 0 | - |
| | 15 | 80 | 78 | | |
| | | × | × | 15 | - |
| Demanda | 15 | 0 | 0 | | |
| Castigo | - | - | - | | |

Finalmente, no es posible calcular castigos y debemos asignar las unidades disponibles a la única celda libre. Luego:

| | | | | Oferta | Castigo |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6 | 7 | 8 | | |
| | 0 | 5 | 5 | 0 | - |
| | 15 | 80 | 78 | | |
| | 15 | × | × | 0 | - |
| Demanda | 0 | 0 | 0 | | |
| Castigo | - | - | - | | |

Nótese que el número de asignaciones es exactamente igual a $m + n - 1 = 2 + 3 - 1 = 5$. Eventualmente, el método puede generar un número inferior de asignaciones. En dicho caso se completa las $m + n - 1$ asignaciones con ceros. En el caso de que falte sólo una asiganción, se puede ubicar un cero en cualquier casilla no asignada. En el caso que se requiera de dos o más ceros, la asignación no es tan arbitraria. Más adelante se definirá qué criterio emplear en dichos casos.

Existen problemas de maximización que pueden ser considerados como problemas de Transporte. En este caso, los coeficientes $c_{ij}$ están asociado a los beneficios unitarios de la variable asociada a la combinación $i - j$ y el objetivo es maximizar la suma total de los aportes individuales de las variables. Se mantienen las restricciones de oferta y demanda.

En los casos de maximización, es preciso alterar los métodos para obtener una solución inicial factible. En el caso del método de la Esquina Noroeste, se debe intentar asignar la mayor cantidad posible a las casillas con mayor $c_{ij}$. En el caso del método de Vogel, las castigos se calculan entre los dos *mayores beneficios* por fila y por columna. Al igual que el método de la Esquina Noroeste, se busca asignar la mayor cantidad posible a las casillas con mayor beneficio.

## 2.2. El Método Simplex del Problema de Transporte

A continuación se expondrán los pasos para aplicar el método Simplex para el problema de Transporte. La deducción y justificación detallada de cada uno de los pasos se puede encontrar en los textos de la bibliografía de la asignatura.

**Paso 1** *Si el problema no está balanceado, balancearlo. Construir el tableau de transporte.*

**Paso 2** *Encontrar una solución inicial factible por el método de la Esquina Noroeste o el de Vogel. Verificar las $m + n - 1$ asignaciones y completarlas si es necesario.*

**Paso 3** *Plantear y resolver el sistema que se obtiene a través de:*

- *Definir para cada fila del tableau la variable $u_i$ con $(i = 1 \ldots m)$.*
- *Definir para cada columna del tableau la variable $v_j$ con $(j = 1 \ldots n)$.*
- *Plantear para cada casilla asignada la ecuación $u_i + v_j = c_{ij}$. Donde $c_{ij}$ es el costo unitario asociado a la casilla $i - j$.*
- *Asignar un valor arbitrario a una de las variables, por ejemplo $u_1 = 0$.*

**Paso 4** *Calcular en todas las casillas no asignadas (no básicas) $e_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$. Si todos los $e_{ij} \geq 0$ se ha encontrado el óptimo. Si existe algún $e_{ij} < 0$, incorporar la variable con menor $e_{ij}$ siempre y cuando pueda formar un loop, en dicho caso, asignar el mayor valor posible de modo de mantener las variables basales mayores o iguales a cero.*

**Paso 5** *Si la solución no es la óptima, emplear la solución del paso anterior para volver a plantear y resolver el sistema (Paso 3). Seguir al Paso 4.*

La variable $e_{ij}$ representa el *aporte neto unitario* de la incorporación de la variable $i-j$ a la base. Por lo tanto, si el problema es de maximización, la solución será óptima si todos los $e_{ij} < 0$. En caso contrario, se ingresa a la base la variable con mayor $e_{ij}$ que pueda formar un loop.

En el caso de que al emplear uno de los métodos para obtener una solución inicial falten dos o más asignaciones para completar las $m+n-1$ asignaciones requeridas, los ceros deben ser ubicados de tal forma que sea suficiente dar sólo un valor arbitrario a las variables del sistema asociado a la asignación para poder resolverlo completamente.

Ilustremos el procedimiento resolviendo el tableau planteado para el problema del primer ejemplo. En ese caso, mediante la Esquina Noroeste se obtuvo la siguiente solución inicial:

| | Ciudad 1 | Ciudad 2 | Ciudad 3 | Ciudad 4 | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 10 | 9 | |
| Planta 1 | 35 | | | | 35 |
| | 9 | 12 | 13 | 7 | |
| Planta 2 | 10 | 20 | 20 | | 50 |
| | 14 | 9 | 16 | 5 | |
| Planta 3 | | | 10 | 30 | 40 |
| Demanda | 45 | 20 | 30 | 30 | |

A continuación podemos plantear las variables del sistema asociado:

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 10 | 9 | |
| $u_1$ | 35 | | | | 35 |
| | 9 | 12 | 13 | 7 | |
| $u_2$ | 10 | 20 | 20 | | 50 |
| | 14 | 9 | 16 | 5 | |
| $u_3$ | | | 10 | 30 | 40 |
| | 45 | 20 | 30 | 30 | |

Luego, las ecuaciones se plantean en las casillas asignadas:

$$
\begin{array}{rcll}
u_1 + v_1 & = & 8 & (1) \\
u_2 + v_1 & = & 9 & (2) \\
u_2 + v_2 & = & 12 & (3) \\
u_2 + v_3 & = & 13 & (4) \\
u_3 + v_3 & = & 16 & (5) \\
u_3 + v_4 & = & 5 & (6)
\end{array}
\tag{2.3}
$$

Agregando la condición $u_1 = 0$ se obtiene de (1) $v_1 = 8$. Luego, de (2) $u_2 = 1$. De (3) y de (4) $v_2 = 11$ y $v_3 = 12$. Reemplazando en (5) se calcula $u_3 = 4$. Finalmente, de (6) se obtiene $v_4 = 1$. A continuación se calculan los $e_{ij}$ en las casillas no básicas:

$$
\begin{array}{rcccl}
e_{12} & = & 6-0-11 & = & -5 \\
e_{13} & = & 10-0-12 & = & -2 \\
e_{14} & = & 9-0-1 & = & 8 \\
e_{24} & = & 7-1-1 & = & 5 \\
e_{31} & = & 14-4-8 & = & 2 \\
e_{32} & = & 9-4-11 & = & -6
\end{array}
\qquad (2.4)
$$

Por lo tanto, el menor $e_{ij}$ corresponde a $e_{32}$ con valor $-6$. Lo que significa que por cada unidad asignada a la variable $x_{32}$ el efecto global neto es de $-6$, independientemente de que el costo asociado a dicha casilla sea de 9. Veamos si existe un loop factible y el máximo valor $\alpha$ que podría tomar la variable.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{8}$ 35 | $\boxed{6}$ | $\boxed{10}$ | $\boxed{9}$ | 35 |
| $\boxed{9}$ 10 | $\boxed{12}$ $20-\alpha$ | $\boxed{13}$ $20+\alpha$ | $\boxed{7}$ | 50 |
| $\boxed{14}$ | $\boxed{9}$ $\alpha$ | $\boxed{16}$ $10-\alpha$ | $\boxed{5}$ 30 | 40 |
| 45 | 20 | 30 | 30 | |

Como las variables deben ser positivas, el valor de $\alpha$ debe ser tal que no introduzca una variable negativa al tableau. En este caso, la condición que controla es $10-\alpha \geq 0$, por lo tanto $\alpha = 10$.

Introducimos el valor de $\alpha$ y volvemos a plantear el sistema asociado:

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | $\boxed{8}$ 35 | $\boxed{6}$ | $\boxed{10}$ | $\boxed{9}$ | 35 |
| $u_2$ | $\boxed{9}$ 10 | $\boxed{12}$ 10 | $\boxed{13}$ 30 | $\boxed{7}$ | 50 |
| $u_3$ | $\boxed{14}$ | $\boxed{9}$ 10 | $\boxed{16}$ | $\boxed{5}$ 30 | 40 |
| | 45 | 20 | 30 | 30 | |

$$
\begin{array}{rcl}
u_1 + v_1 & = & 8 \\
u_2 + v_1 & = & 9 \\
u_2 + v_2 & = & 12 \\
u_2 + v_3 & = & 13 \\
u_3 + v_2 & = & 9 \\
u_3 + v_4 & = & 5 \\
u_1 & = & 0
\end{array}
\qquad (2.5)
$$

Las únicas variables no básicas que tienen un $e_{ij} < 0$ son: $e_{12} = -5$, $e_{24} = -1$ y $e_{13} = -2$. Buscando un loop para $x_{12}$ y su máximo valor factible se obtiene:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 10 | 9 | |
| $35-\alpha$ | $\alpha$ | | | 35 |
| 9 | 12 | 13 | 7 | |
| $10+\alpha$ | $10-\alpha$ | 30 | | 50 |
| 14 | 9 | 16 | 5 | |
| | 10 | | 30 | 40 |
| 45 | 20 | 30 | 30 | |

De acuerdo al loop encontrado, el máximo valor para $\alpha$ es 10. Luego, volvemos a plantear el sistema para las variables basales:

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 10 | 9 | |
| $u_1$ | 25 | 10 | | | 35 |
| | 9 | 12 | 13 | 7 | |
| $u_2$ | 20 | | 30 | | 50 |
| | 14 | 9 | 16 | 5 | |
| $u_3$ | | 10 | | 30 | 40 |
| | 45 | 20 | 30 | 30 | |

$$
\begin{aligned}
u_1 + v_1 &= 8 \\
u_1 + v_2 &= 6 \\
u_2 + v_1 &= 9 \\
u_2 + v_3 &= 13 \\
u_3 + v_2 &= 9 \\
u_3 + v_4 &= 5 \\
u_1 &= 0
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Resolviendo y evaluando los $e_{ij}$ para cada variable no basal, el único $e_{ij} < 0$ es $e_{13} = -2$. Verificando que exista un loop y determinando el máximo valor posible se tiene:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 10 | 9 | |
| $25-\alpha$ | 10 | $\alpha$ | | 35 |
| 9 | 12 | 13 | 7 | |
| $20+\alpha$ | | $30-\alpha$ | | 50 |
| 14 | 9 | 16 | 5 | |
| | 10 | | 30 | 40 |
| 45 | 20 | 30 | 30 | |

En este caso, para mantener las variables positivas $\alpha$ deber ser 25. Haciendo la actualización y volviendo a resolver el sistema asociado se tiene:

| | $v_1$ | $v_2$ | $v_3$ | $v_4$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $u_1$ | $\boxed{8}$ | $\boxed{6}$ 10 | $\boxed{10}$ 25 | $\boxed{9}$ | 35 |
| $u_2$ | $\boxed{9}$ 45 | $\boxed{12}$ | $\boxed{13}$ 5 | $\boxed{7}$ | 50 |
| $u_3$ | $\boxed{14}$ | $\boxed{9}$ 10 | $\boxed{16}$ | $\boxed{5}$ 30 | 40 |
| | 45 | 20 | 30 | 30 | |

$$\begin{aligned} u_1 + v_2 &= 6 \\ u_1 + v_3 &= 10 \\ u_2 + v_1 &= 9 \\ u_2 + v_3 &= 13 \\ u_3 + v_2 &= 9 \\ u_3 + v_4 &= 5 \\ u_1 \quad &= 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Resolviendo el sistema, se determina que todos los $e_{ij}$ son positivos, por lo tanto la incorporación de cualquier variable a la base aumentará el valor total de la función objetivo. Como el problema es de minimización, se ha alcanzado el óptimo. Por lo tanto, el tableau final queda:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\boxed{8}$ | $\boxed{6}$ 10 | $\boxed{10}$ 25 | $\boxed{9}$ | 35 |
| $\boxed{9}$ 45 | $\boxed{12}$ | $\boxed{13}$ 5 | $\boxed{7}$ | 50 |
| $\boxed{14}$ | $\boxed{9}$ 10 | $\boxed{16}$ | $\boxed{5}$ 30 | 40 |
| 45 | 20 | 30 | 30 | |

La solución corresponde exactamente a la entrega con anterioridad. La solucón óptima es:

$$\begin{aligned} x_{12} &= 10 \\ x_{13} &= 25 \\ x_{21} &= 45 \\ x_{23} &= 5 \\ x_{32} &= 10 \\ x_{34} &= 30 \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$x_{11} = x_{14} = x_{22} = x_{24} = x_{31} = x_{33} = 0 \tag{2.9}$$

$$z = 6(10) + 10(25) + 9(45) + 13(5) + 9(10) + 5(30) = 1020 \tag{2.10}$$

# 3. Análisis de Sensibilidad en Problemas de Transporte

A continuación se discustirá tres tipos de análisis de sensibilidad de un problema de transporte:

**Variación 1** *Cambios en los coeficientes de la función objetivo de variables no básicas.*

**Variación 2** *Cambios en los coeficientes de la función objetivo de variables básicas.*

**Variación 3** *Incrementos en un oferta y en una demanda.*

Para ilustrar el análisis de sensibilidad sobre la solución óptima de un problema de transporte emplearemos la solución obtenida en la sección anterior:

| | $v_1 = 6$ | $v_2 = 6$ | $v_3 = 10$ | $v_4 = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 10 | 9 | |
| $u_1 = 0$ | | 10 | 25 | | 35 |
| | 9 | 12 | 13 | 7 | |
| $u_2 = 3$ | 45 | | 5 | | 50 |
| | 14 | 9 | 16 | 5 | |
| $u_3 = 3$ | | 10 | | 30 | 40 |
| | 45 | 20 | 30 | 30 | |

## 3.1. Variación de Coeficientes en la Función Objetivo de Variables No Basales

En este caso, simplemente se impone una variación $\Delta$ en el coeficiente de la variable $x_{ij}$ a modificar, estudiando el rango de variación admisible de modo que el $e_{ij}$ respectivo mantenga su signo.

A modo de ejemplo, supongamos que se desea determinar a cuanto debe disminuir el costo de envío desde la Planta 1 a la Ciudad 1 de modo de incorporar esta combinación a la solución óptima.

En este caso, un cambio del coeficiente $c_{11} = 8$ a $c_{11} = 8 - \Delta$ no afecta los valores de los $u_i$ y $v_j$ calculados previamente, por lo tanto:

$$e_{11} = (8 - \Delta) - 0 - 6 = 2 - \Delta \tag{3.1}$$

Como corresponde a un problema de minimización, para que $x_{11}$ entre a la base debe cumplirse que $e_{11} \leq 0$, es decir, $\Delta \geq 2$. Por lo tanto, el costo debe disminuir a menos de 6 para que se incorpore a la solución óptima. De todas formas, se debe verificar que la variable pueda generar un loop:

| | $v_1 = 6$ | $v_2 = 6$ | $v_3 = 10$ | $v_4 = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 10 | 9 | |
| $u_1 = 0$ | $\alpha$ | 10 | $25 - \alpha$ | | 35 |
| | 9 | 12 | 13 | 7 | |
| $u_2 = 3$ | $45 - \alpha$ | | $5 + \alpha$ | | 50 |
| | 14 | 9 | 16 | 5 | |
| $u_3 = 3$ | | 10 | | 30 | 40 |
| | 45 | 20 | 30 | 30 | |

Por lo tanto la variable puede entrar a la base con valor de 25, el nuevo valor de la función objetivo sería:

$$z^{k+1} = z^k + e_{ij} \times \alpha = 1020 + (2 - \Delta)25 \qquad \Delta \geq 2 \tag{3.2}$$

## 3.2. Variación de Coeficientes en la Función Objetivo de Variables Basales

En este caso la situación es más compleja pues una variación del coeficiente de una variable basal afectará el valor de los $u_i$ y los $v_j$ calculados previamente. En este caso, se debe volver a resolver el sistema en términos de la variación $\Delta$ del coeficiente de la variable basal, volver a calcular los $e_{ij}$ y determinar el rango de variación admisible.

Supongamos por ejemplo que se desea determinar en cuanto podría aumentar el costo de envío desde la Planta 1 a la Ciudad 3 de modo de mantener la base óptima. En este caso, cambiamos $c_{13} = 10$ por $c_{13} = 10 + \Delta$ y volvemos a resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcl} u_1 + v_2 & = & 6 \\ u_1 + v_3 & = & 10 + \Delta \\ u_2 + v_1 & = & 9 \\ u_2 + v_3 & = & 13 \\ u_3 + v_2 & = & 9 \\ u_3 + v_4 & = & 5 \\ u_1 & = & 0 \end{array} \tag{3.3}$$

De esta forma, se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} u_1 & = & 0 \\ v_2 & = & 6 \\ v_3 & = & 10 + \Delta \\ v_1 & = & 6 + \Delta \\ u_2 & = & 3 - \Delta \\ u_3 & = & 3 \\ v_4 & = & 2 \end{array} \tag{3.4}$$

Luego, calculamos los $e_{ij}$ para todas las variables no basales y sus restricciones:

$$\begin{array}{rcccccccl} e_{11} & = & 8 - u_1 - v_1 & = & 2 - \Delta & \geq & 0 & \rightarrow & \Delta \leq 2 \\ e_{14} & = & 9 - u_1 - v_4 & = & 7 & \geq & 0 & & \\ e_{22} & = & 12 - u_2 - v_2 & = & 3 + \Delta & \geq & 0 & \rightarrow & \Delta \geq -3 \\ e_{24} & = & 7 - u_2 - v_4 & = & 2 + \Delta & \geq & 0 & \rightarrow & \Delta \geq -2 \\ e_{31} & = & 14 - u_3 - v_1 & = & 5 - \Delta & \geq & 0 & \rightarrow & \Delta \leq 5 \\ e_{33} & = & 16 - u_3 - v_3 & = & 3 - \Delta & \geq & 0 & \rightarrow & \Delta \leq 3 \end{array} \tag{3.5}$$

Por lo tanto, la base óptima se mantiene para un rango de variación: $-2 \geq \Delta \geq 2$, o bien, $8 \leq c_{13} \leq 12$.

## 3.3. Incrementos en una Oferta y en una Demanda

Si tanto en alguna oferta $s_i$ como en alguna demanda $d_j$ se produce un aumento de $\Delta$, se mantiene el balanceo del problema. En este caso, se demuestra que:

$$z_{nuevo} = z_{original} + \Delta \times u_i + \Delta \times v_j \tag{3.6}$$

La expresión anterior se obtiene a partir de que tanto los $u_i$ y los $v_j$ equivalen a menos el precio sombra de la restricción asociada a cada origen $i$ o destino $j$ según corresponda.

Por ejemplo, si la oferta de la Planta 1 y la demanda de la Ciudad 2 crece en una unidad, se tiene:

$$z_{nuevo} = 1020 + 1 \times 0 + 1 \times 6 = 1026 \tag{3.7}$$

Una vez definido el nuevo valor de la función objetivo, es importante determinar como cambian los valores de las variables. Para ello se siguen las siguientes reglas:

1. Si $x_{ij}$ es una variable básica, $x_{ij}$ se incrementa en $\Delta$.
2. Si $x_{ij}$ es una variable no básica, se debe encontrar el loop que contenga a $x_{ij}$ y algunas de las variables basales. Encontrar la primera celda de la fila $i$ (distinta de $x_{ij}$) y aumentar su valor en $\Delta$. Continuar el loop, incrementando y disminuyendo en $\Delta$ en forma alternada.

Para ilustrar la primera situación, supongamos que $s_1$ y $d_2$ aumentan en 2. Como $x_{12}$ es una variable basal, el nuevo tableau óptimo queda:

| | $v_1 = 6$ | $v_2 = 6$ | $v_3 = 10$ | $v_4 = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 10 | 9 | |
| $u_1 = 0$ | | 12 | 25 | | 37 |
| | 9 | 12 | 13 | 7 | |
| $u_2 = 3$ | 45 | | 5 | | 50 |
| | 14 | 9 | 16 | 5 | |
| $u_3 = 3$ | | 10 | | 30 | 40 |
| | 45 | 22 | 30 | 30 | |

El nuevo valor de la función objetivo es: $1020 + 2u_1 + 2v_2 = 1032$

Para ilustrar la segunda situación, supongamos que $s_1$ y $d_1$ aumentan en 1. Como $x_{11}$ es una variable no basal, debemos determinar el loop que incorpora a la celda $(1, 1)$. En este caso, el loop es $(1, 1) - (1, 3) - (2, 3) - (2, 1)$. La primera celda del loop que está en la fila $i$ distinta de $(1, 1)$ es $(1, 3)$. Entonces, se debe agregar $\Delta$ a $x_{13}$. Continuando con el loop, se debe disminuir en $\Delta$ $x_{23}$ y volver a aumentar en $\Delta$ a $x_{21}$. El nuevo tableau óptimo se muestra a continuación:

| | $v_1 = 6$ | $v_2 = 6$ | $v_3 = 10$ | $v_4 = 2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 8 | 6 | 10 | 9 | |
| $u_1 = 0$ | | 10 | 26 | | 36 |
| | 9 | 12 | 13 | 7 | |
| $u_2 = 3$ | 46 | | 4 | | 50 |
| | 14 | 9 | 16 | 5 | |
| $u_3 = 3$ | | 10 | | 30 | 40 |
| | 46 | 20 | 30 | 30 | |

El nuevo valor de la función objetivo es: $1020 + u_1 + v_1 = 1026$.

## 4. El Problema de Transbordo

Un problema de transporte permite sólo envíos directamente desde los puntos de origen a los puntos de demanda. En muchas situaciones, sin embargo, existe la posibilidad de hacer envíos a través de puntos intermedios (puntos de transbordo). En este caso se habla de un problema de transbordo. A continuación veremos como la solución a de problema de transbordo puede ser encontrada a través de un problema de transporte.

Definiremos los *puntos de oferta* como aquellos puntos desde donde sólo se puede despachar unidades. Similarmente, un *punto de demanda* es un punto donde sólo se pueden recibir unidades. Un *punto de transbordo* es punto que puede recibir y enviar unidades a otros puntos. Veamos un ejemplo:

**Ejemplo 2** *Una fábrica posee dos plantas de manufactura, una en Memphis y otra en Denver. La planta de Memphis puede producir hasta 150 unidades al día, la de Denver hasta 200 unidades al día. Los productos son enviados por avión a Los Angeles y Boston. En ambas ciudades, se requieren* 130 *unidades diarias. Existe una posibilidad de reducir costos enviando algunos productos en primer lugar a New York o a Chicago y luego a sus destinos finales. Los costos unitarios de cada tramo factible se ilustran en la siguiente tabla:*

| | *Hacia* | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *Desde* | *Memphis* | *Denver* | *N.Y.* | *Chicago* | *L.A.* | *Boston* |
| *Memphis* | *0* | - | *8* | *13* | *25* | *28* |
| *Denver* | - | *0* | *15* | *12* | *26* | *25* |
| *N.Y.* | - | - | *0* | *6* | *16* | *17* |
| *Chicago* | - | - | *6* | *0* | *14* | *16* |
| *L.A.* | - | - | - | - | *0* | - |
| *Boston* | - | - | - | - | - | *0* |

*La fábrica desea satisfacer la demanda minimizando el costo total de envío.*

En este problema, Memphis y Denver son puntos de oferta de 150 y 200 unidades respectivamente. New York y Chicago son puntos de transbordo. Los Angeles y Boston son puntos de demanda de 130 unidades cada uno. Esquemáticamente, la situación se muestra en la figura 4.1.

A continuación construiremos un problema de transporte balanceado a partir del problema de transbordo. Para ello podemos seguir los siguientes pasos (suponiendo que la oferta excede a la demanda):

**Paso 1** *Si es necesario, se debe agregar un punto de demanda dummy (con oferta* 0 *y demanda igual al excedente) para balancear el problema. Los costos de envío al punto dummy deben ser cero. Sea* $s$ *la oferta total disponible.*

**Paso 2** *Construir un tableau de transporte siguiendo las siguientes reglas:*

- *Incluir una fila por cada punto de oferta y de transbordo.*
- *Incluir una columna por cada punto de demanda y de transbordo.*

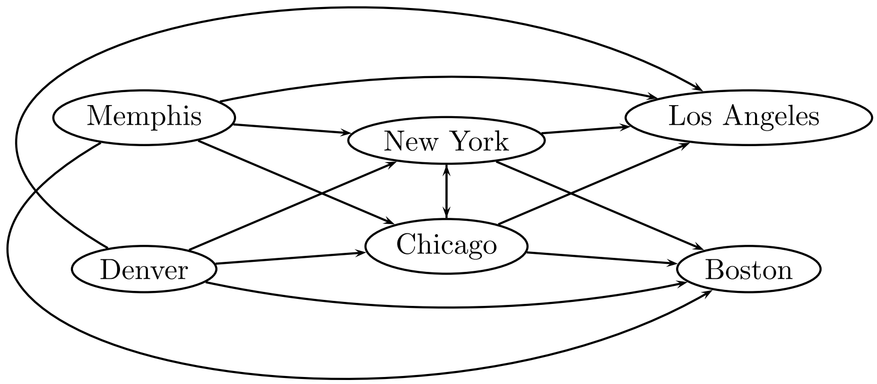



Figura 4.1: Representación gráfica problema de transbordo

- *Cada punto $i$ de oferta debe poseer una oferta igual a su oferta original $s_i$. Cada punto de demanda $j$ debe poseer una demanda igual a su demanda original $d_j$.*
- *Cada punto de transbordo debe tener una oferta igual a su oferta original + $s$ y una demanda igual a su demanda original + $s$. Como de antemano no se conoce la cantidad que transitará por cada punto de transbordo, la idea es asegurar que no se exceda su capacidad. Se agrega $s$ a la oferta y a la demanda del punto de transbordo para no desbalancear el tableau.*

En el ejemplo, $s = 150 + 200 = 350$. La demanda total es $130 + 130 = 260$. Luego, el punto dummy debe tener una demanda de $350 - 260 = 90$. Como en el ejemplo los puntos de transbordo no tienen ni demanda ni oferta por sí mismos, la oferta y demanda en el tableau deber ser igual a $s$. Una vez planteado el tableau, se pueden emplear los métodos vistos anteriormente para obtener una solución inicial factible y obtener la solución óptima. En este caso el tableau queda (incluída la solución óptima):

| | N.Y. | Chicago | L.A. | Boston | Dummy | Oferta |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Memphis | [8] 130 | [13] | [25] | [28] | [0] 20 | 150 |
| Denver | [15] | [12] | [26] | [25] 130 | [0] 70 | 200 |
| N.Y. | [0] 220 | [6] | [16] 130 | [17] | [0] | 350 |
| Chicago | [6] | [0] 350 | [14] | [16] | [0] | 350 |
| Demanda | 350 | 350 | 130 | 130 | 90 | |

Para interpretar la solución anterior, es preciso revisar cuidadosamente las combinaciones asignadas. De la primera fila, vemos que de Memphis sólo se despacharon 130 unidades a New York del total de 150 disponibles, el excedente de 20 unidades está asignado al punto artificial. De la segunda fila se desprende que de Denver se enviaron 130 unidades a Boston del total de 200 disponibles, quedando 70 asignadas al punto dummy. En la tercera fila vemos que se enviaron desde el punto de transbordo en New York 130 unidades a Los Angeles. La asignación de 220 de N.Y. a N.Y. significa que del total de unidades en tránsito, 220 no pasaron por dicho nodo de transbordo, o bien, que no se emplearon 220 unidades de la capacidad del punto. Finalmente, en la cuarta fila, la asignación de 350 del punto de transbordo de Chicago a Chicago representa simplemente que no se empleó el punto de transbordo. Gráficamente, la solución óptima se muestra en la figura 4.2.

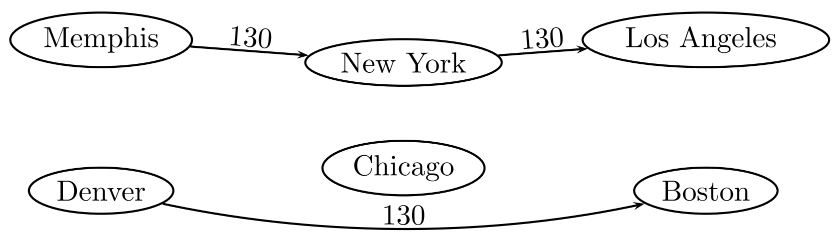



Figura 4.2: Representación gráfica solución problema de transbordo

## 5. Ejercicios

1. Una fábrica de zapatos predice las siguientes demandas por sus pares de zapatos para los próximos 6 meses: mes 1, 200; mes 2, 260; mes 3, 240; mes 4, 340; mes 5, 190; mes 6, 150. El costo de fabricar una par de zapatos es de US$ 7 con horas normales de trabajo y de US$ 11 con horas de sobretiempo. Durante cada mes, la producción en horario normal está limitada a 200 pares de zapatos y la producción con sobretiempo está limitada a 100 pares. Guardar un par de zapatos en inventario cuesta US $ 1 por mes.

   - Formule un modelo que permita obtener una solución óptima.
   - Determine una solución factible y verifique si es la solución óptima.

2. Debido a las fuertes lluvias de los últimos días en el sur, la empresa *stop-lluvia*, dedicada al rubro de los paraguas, ha visto un aumento en la demanda de sus productos. Los paraguas se arman en dos plantas, según la siguiente tabla:

| Planta | Capacidad de producción [paragua] | Costo de producción [US$/paragua] |
|---|---|---|
| A | 2600 | 2300 |
| B | 1800 | 2500 |

   Cuatro cadenas de multitiendas están interesadas en adquirir los paraguas, con las siguientes características:

| Cadena | Máxima demanda [paragua] | Precio dispuesto a pagar [US$/paragua] |
|---|---|---|
| 1 | 1800 | 3900 |
| 2 | 2100 | 3700 |
| 3 | 550 | 4000 |
| 4 | 1750 | 3600 |

   El costo de traslado a cada tienda (fijo) se muestra en la siguiente tabla:

| Costo Fijo [US$] | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| A | 600 | 800 | 1100 | 900 |
| B | 1200 | 400 | 800 | 500 |

   - Determinar la mejor decisión de entrega, para la empresa productora de paraguas.
   - Si todas las tiendas acuerdan pagar lo mismo por cada paragua, plantee el problema desde el punto de vista de la minimización de lo que deja de ganar por no elegir lo que más conviene.
   - ¿ Cuál sería la mejor asignación si el costo de traslado desde ambas plantas es el mismo para todas las tiendas ?

3. Se desataron tres incendios en Santiago. Los incendios 1 y 2 requieren de la participación de dos carros bomba y el incendio 3 requierre tres carros bombas. Existen cuatro compañías de bomberos que pueden responder a estos incendios. La compañía 1 tiene tres carros bombas disponibles, las compañías 2 y 3 tienen dos carros bombas cada una y la compañía 4 tiene doce carros bombas disponibles. El tiempo en minutos que toma un carro bomba en viajar desde cada compañía al lugar de cada incendio se muestra en la siguiente tabla:

| | Incendio 1 | Incendio 2 | Incendio 3 |
|---|---|---|---|
| Compañía 1 | 6 | 7 | 9 |
| Compañía 2 | 5 | 8 | 11 |
| Compañía 3 | 6 | 9 | 10 |
| Compañía 4 | 7 | 10 | 12 |

El *costo de respuesta* a cada incendio puede ser estimado según el tiempo que tardan en llegar al lugar de incendio cada uno de los carros bombas requeridos. Sea $T_{ij}$ el tiempo (en minutos) cuando el $j-$ésimo carro bomba llega al incendio $i$. Luego, el costo de respuesta a cada incendio se puede estimar de la siguiente manera:

- Incendio 1: $4 \times T_{11} + 6 \times T_{12}$
- Incendio 2: $7 \times T_{21} + 3 \times T_{22}$
- Incendio 3: $9 \times T_{31} + 8 \times T_{32} + 5 \times T_{33}$

*a*) Formule y resuelva el problema que minimice los costos de respuesta asociados a la asignación de los carros bombas a los incendios.

*b*) ¿ Podría ser válido lo obtenido anteriormente si el costo del incendio 1 fuese $6 \times T_{11} + 4 \times T_{12}$?

4. Usted ha sido encargado de diseñar un plan de producción ventajoso para una empresa durante las 4 estaciones del año. Esta empresa tiene una capacidad de producción para manufacturar 30000 unidades de un producto no perecible en Primavera y Otoño de este año. Debido a enfermedades, vacaciones y permisos, la producción será sólo de 25000 unidades en Verano e Invierno. La demanda por este producto tambié es estacional. El Departamento de Marketing has estimado las ventas de Primavera en 25000 unidades, en Verano 40000 unidades, 30000 unidades en Otoño y sólo 15000 unidades en Invierno. Los costos unitarios de producción han aumentado por la inflación y por la influencia de los factores estacionales, los cuales se estiman en $US$80, $US$85, $US$82 y $US$86 en Primavera, Verano, Otoño e Invierno, respectivamente. Cualquier exceso de producción se puede almacenar a un costo de $US$10 por unidad almacenada durante una estación. Una unidad se vende en $US$120, $US$140, $US$125 y $US$105 en Primavera, Verano, Otoño e Invierno, respectivamente. En bodega había al comienzo 10000 unidades y al final deben haber 10000 unidades. ¿ Cuál es la mayor ganancia para su plan ?