

Pauta Control 2 - IN41B - Economía II

Profesor: Alexandre Janiak
Auxiliar: Santiago Justel V.
Departamento Ingeniería Civil Industrial
Universidad de Chile
Duración: 1 hora 30 minutos

5 de Mayo del 2009

Coloque desde ya su nombre en todas las hojas del control.

Ejercicio 1 Una empresa maximiza los beneficios descontados siguientes:

$$\max \int_0^{\infty} e^{-rt} [f(k_t) - i_t (1 + \phi(i_t))] dt$$

donde la función ϕ es creciente, convexa y $\phi(0) = 0$, i_t es la inversión en el tiempo t , y está sujeta a la ecuación dinámica para el stock de capital:

$$s.a. \quad \dot{k}_t = i_t$$

1. ¿Cómo pueden interpretar la función ϕ ?

Sol:

ϕ se puede interpretar como el resultado de unos costos de ajuste a la inversión. Cuando mayor es la inversión, proporcionalmente mayor es el costo asociado: si ϕ fuese siempre cero, cada unidad de capital costaría 1, pero con un ϕ creciente y convexo, el costo unitario de la inversión es creciente en el tamaño de la inversión.

2. Escriba el hamiltoniano asociado al programa de maximización de la empresa, usando $Q_t = e^{-rt} q_t$ como notación para el multiplicador de Lagrange. Defina además las variables de estado y de control del problema.

Sol:

La variable de control es i_t (la inversión) y la variable de estado es k_t (el stock de capital).

El hamiltoniano del problema es: $\mathcal{H} = e^{-rt} [f(k_t) - i_t (1 + \phi(i_t))] + Q_t i_t$

3. Muestre que las condiciones de primer orden son:

$$1 + \phi(i_t) + i_t \phi'(i_t) = q_t$$

$$f'(k_t) = r q_t - \dot{Q}_t$$

Sol:

Sabemos que:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial i_t} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k_t} = -\dot{Q}_t$$

En este caso se tendrá que:

$$0 = e^{-rt} [-1 - \phi(i_t) - i_t \phi'(i_t)] + Q_t$$
$$-\dot{Q}_t = e^{-rt} f'(k_t)$$

Recordemos que $Q_t = e^{-rt}q_t$, así tenemos que ambas ecuaciones equivalen a:

$$\begin{aligned}1 + \phi(i_t) + i_t\phi'(i_t) &= q_t \\ f'(k_t) &= rq_t - \dot{q}_t\end{aligned}$$

4. Integrando esta segunda condición se puede llegar a la condición siguiente:

$$q_t = \int_t^\infty e^{-r(s-t)} f'(k_s) ds$$

Interprete esta ecuación.

Sol:

Se ve que q_t corresponde al valor descontado asociado a una unidad marginal de capital, es decir, es el valor descontado asociado a los ingresos marginales futuros de esta unidad marginal. Si existiese un mercado de las acciones, cada unidad de capital de la empresa se vendería a q en este mercado.

5. Basándose en la primera condición de primer orden, muestre que la inversión es positiva si $q_t > 1$ y negativa cuando $q_t < 1$

Sol:

La primera ecuación nos dice:

$$1 + \phi(i_t) + i_t\phi'(i_t) = q_t$$

Lo que equivalentemente queda:

$$\phi(i_t) + i_t\phi'(i_t) = q_t - 1$$

Si definimos $[\phi(i_t) + i_t\phi'(i_t)]$ como una función $\Gamma(i_t)$, notemos que $\Gamma(\cdot)$ es creciente, luego su inversa también es creciente. Notemos además que $\Gamma(0) = 0$ y esto implica que $q_t = 1$, puesto que $\phi(0) = 0$ e $\phi'(0) = 0$ (ambas expresiones son supuestos razonables en una función de costos, si invierto 0, esto cuesta 0, y si tengo inversión 0, una unidad de inversión marginal cuesta 0).

Luego tendremos:

$$\Gamma(i_t) = q_t - 1$$

o equivalentemente

$$i_t = \Gamma^{-1}(q_t - 1)$$

Entonces, si $q_t > 1$ significa que la inversión será positiva, en caso contrario, la inversión será negativa.

6. Interprete el resultado de la pregunta anterior de la misma manera que se hizo en clase.

Sol:

q es el ratio del valor de una unidad de capital dentro de la empresa sobre el valor de una unidad de capital fuera de la empresa (en el mercado): en el mercado comprar una unidad de capital cuesta uno, mientras que vale q dentro de la empresa (ver pregunta 4 anterior). Entonces, si q es mayor que 1, la empresa tiene incentivos para comprar capital porque este es mas valorizado dentro de la empresa, mientras que si q es menor que 1, la empresa tiene incentivos para vender capital porque este es mas valorizado fuera de la empresa.

7. En la página web del Mundo, diario español, uno podía leer el artículo siguiente el 13 de abril. ¿Cómo lo que está ocurriendo a General Motors se puede relacionar con nuestro ejercicio?

EL GOBIERNO LE EXIGE CANJEAR DEUDA POR TÍTULOS

General Motors se desploma en Bolsa por la presión para que prepare la bancarrota

Nueva York.- El Departamento del Tesoro de Estados Unidos ha ordenado a General Motors que prepare una declaración de suspensión de pagos para tenerla lista en el caso de que el 1 de junio no cuente con un plan de reestructuración sólido.

'The New York Times' ha revelado que miembros de la comisión para la industria automovilística designados por el presidente Barack Obama trabajan en ello con representantes de General Motors desde hace

una semana, lo que ha provocado su desplome bursátil.

“El objetivo es prepararse para una **rápida quiebra quirúrgica**“, añade el diario, al recordar que GM, que ha obtenido una ayuda del Gobierno de 13.400 millones de dólares, insiste en llevar a cabo una rápida reestructuración para evitar que se dañen permanentemente sus ventas y su imagen.

Los preparativos que exige el Gobierno están dirigidos a asegurar que la declaración de quiebra de General Motors esté lista en el caso de que la empresa no consiga alcanzar un acuerdo con los tenedores de bonos para **canjear 28.000 millones de dólares de deuda por títulos de General Motors** y con el sindicato de trabajadores del sector automovilístico.

Uno de los planes que se está considerando consistiría en la creación de una **empresa que adquiriera los activos “buenos” de General Motors** inmediatamente después de que el fabricante de automóviles acogiera a la ley de quiebra.

La “buena General Motors entraría y saldría de la protección de quiebra en sólo dos semanas, utilizando entre 5.000 o 7.000 millones de dólares“ financiados por el Gobierno.

El resto de General Motors necesitaría una **financiación del Gobierno de 70.000 millones de dólares** o posiblemente más para resolver las obligaciones del seguro médico y la liquidación de fábricas, según expertos judiciales y funcionarios oficiales citados por el diario.

Sol:

Para contestar a esa pregunta, se debe referir a lo que ocurre con las variables q , k e i para General Motors. La idea es que el mercado piensa que los ingresos marginales futuros asociados a una unidad de capital de General Motors son ahora mas bajos. Esto implica que la q asociada cae y el precio de sus acciones también. Por lo tanto, una solución es vender parte del capital de la empresa (i negativo y disminución de k).

Ejercicio 2 Considere un modelo de una economía cerrada que no tiene inversión ni tiene gobierno. La función de utilidad doméstica es:

$$U_1 = \log(C_1) + \beta \log(C_2)$$

El país doméstico recibe una dotación de perecibles de Y_1 e Y_2 en los 2 períodos, por ahora suponga Y_2 exógeno.

1. Muestre que el consumo doméstico del período 1 es una función de r

$$C_1(r) = \frac{1}{1+\beta} \left(Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \right)$$

Sol:

Por ecuación de Euler se tiene que:

$$\frac{C_2}{C_1} = \beta(1+r) \quad (1)$$

Además se cumplirá la restricción presupuestaria del problema del consumidor, ie:

$$Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} = C_1 + \frac{C_2}{1+r} \quad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) se llega a:

$$C_1(r) = \frac{1}{1+\beta} \left(Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \right)$$

2. Muestre que el ahorro doméstico es:

$$S_1(r) = \frac{\beta}{1+\beta}Y_1 - \frac{1}{(1+\beta)(1+r)}Y_2$$

Sol:

Por definición sabemos del problema del consumidor que el ahorro intertemporal viene dado por la siguiente expresión:

$$S_1 = Y_1 - C_1$$

Luego reemplazando la expresión obtenida en la parte anterior para $C_1(r)$ se llega a lo pedido.

$$S_1(r) = \frac{\beta}{1+\beta}Y_1 - \frac{1}{(1+\beta)(1+r)}Y_2$$

Agreguemos inversión a este modelo. Supongamos que la producción en el segundo período es una función estrictamente cóncava del capital, multiplicado por un factor de productividad, es decir:

$$Y_2 = A_2 K_2^\alpha \quad (\alpha < 1)$$

3. El stock de capital del país estará determinado de tal manera que la productividad marginal del capital sea igual a r . Muestre entonces que esto implica que:

$$K_2 = \left(\frac{\alpha A_2}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Sol:

Por enunciado nos dicen que:

$$PMg_K = r$$

Es la condición de optimalidad para encontrar el capital en el siguiente período.

Entonces, calculando:

$$PMg_K = \frac{\partial Y_2}{\partial K_2} = \frac{\alpha A_2}{K_2^{1-\alpha}} = r$$

Despejando se llega a lo pedido:

$$K_2 = \left(\frac{\alpha A_2}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

4. Recordando que $I_t = K_{t+1} - K_t$, encuentre la inversión del período 1, en función de r .

Sol:

$$I_1 = K_2 - K_1$$

Reemplazando la expresión para K_2 se llega a:

$$I_1 = \left(\frac{\alpha A_2}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - K_1$$

5. Muestre y justifique que el consumo en el primer período se puede escribir como:

$$C_1(r) = \frac{1}{1+\beta} \left(Y_1 - I_1 + \frac{Y_2 - I_2}{1+r} \right)$$

Sol:

Recordemos la ecuación obtenida en la parte 1.

$$C_1(r) = \frac{1}{1+\beta} \left(Y_1 + \frac{Y_2}{1+r} \right)$$

Este caso era en general, cuando el producto era exógeno.

Sabemos que como la economía está cerrada y no hay gobierno, igual al caso anterior, luego después de invertir, sólo me queda $Y_t - I_t$, para consumir.

Entonces, la ecuación anterior queda:

$$C_1(r) = \frac{1}{1+\beta} \left(Y_1 - I_1 + \frac{Y_2 - I_2}{1+r} \right)$$

6. Usando las partes anteriores y el hecho de que $K_3 = 0$ encuentre una expresión para el ahorro en función de r .

Sol: Notemos que $I_2 = K_3 - K_2 = -K_2 = -\left(\frac{\alpha A_2}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$$S_1(r) = Y_1 - \frac{1}{1+\beta} \left(Y_1 - I_1 + \frac{Y_2 - I_2}{1+r} \right)$$

$$S_1(r) = \frac{\beta Y_1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\beta} \left(I_1 - \frac{Y_2 - I_2}{1+r} \right)$$

Tomando las definiciones de I_1 y I_2 obtenidas, y además reemplazando $Y_2 = A_2 \left(\frac{\alpha A_2}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ queda:

$$S_1(r) = \frac{\beta Y_1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\beta} \left(\left(\frac{\alpha A_2}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - K_1 - \frac{A_2 \left(\frac{\alpha A_2}{r}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} + \left(\frac{\alpha A_2}{r}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}{1+r} \right)$$

7. Llamemos a la curva obtenida en el punto 4 II , y a la curva obtenida en 6 SS , grafique ambas curvas (ojo que la variable es r) en el mismo plano. ¿Qué representa su intersección?

Hint: Encuentre la pendiente de ambas curvas, esto lo ayudará en su gráfico

Sol:

Primero veamos la función II , teniéndose así que:

$$\frac{dI(r)}{dr} = \left(\frac{1}{1+\beta} \right) \left(\frac{1}{\alpha-1} \right) \left(\frac{\alpha A_2}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{r}$$

Notemos que como $\alpha < 1$, la derivada es negativa. Luego la II tiene pendiente negativa.

Veamos ahora la SS :

Reescribamos SS , a manera de juntar todos los términos comunes, quedando así:

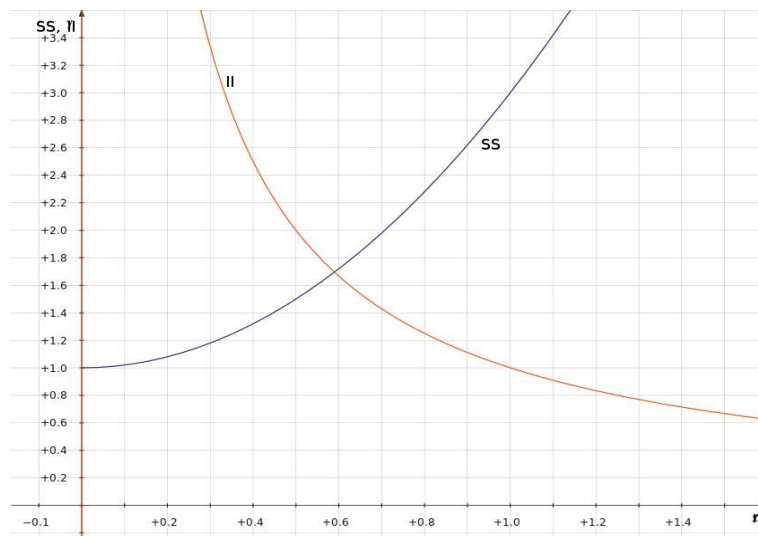
$$S_1(r) = \frac{\beta Y_1}{1+\beta} + \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{\alpha A_2}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{r}{1+r} \frac{\alpha}{1-\alpha} \right)$$

Tomemos ahora la derivada

$$\frac{dS_1}{dr} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{1}{1+\beta} \left(\frac{1}{(1+r)^2} \left(\frac{\alpha A_2}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{r}{1+r} \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{\alpha A_2}{r} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \frac{1}{r} \right)$$

Como $\alpha < 1$, todos los términos son positivos, luego la derivada es positiva, entonces la pendiente de SS es positiva.

Entonces el gráfico queda más o menos así:



La intersección de SS e II nos entrega la tasa de autarquía (r_a), que es la tasa de interés de la economía si estuviese cerrada, en la que el ahorro es 0, o equivalentemente:

$$S = I$$

Luego, r_a es tal que:

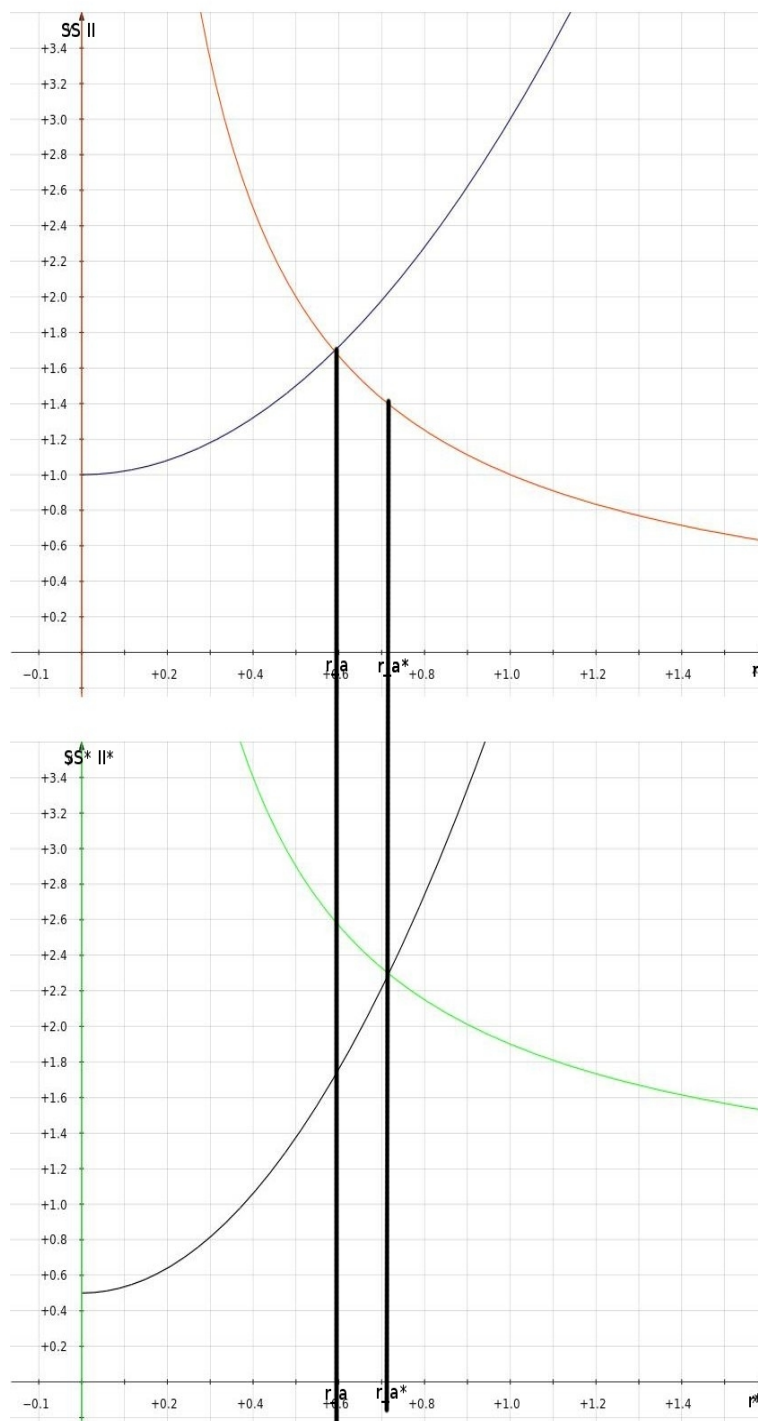
$$SS(r_a) = II(r_a)$$

Que es la intersección de nuestro gráfico.

8. Suponga que existe una economía extranjera que tiene expresiones similares, luego este país tiene un gráfico similar al encontrado en el apartado anterior. Sin calcular nada, y suponiendo que ambos países son economías abiertas. ¿Qué debiese suceder con la tasa de interés que enfrentan? ¿Dónde debiese estar? ¿Cómo serán los movimientos en la cuenta corriente de ambas economías? ¿De qué dependerán? Tomando la idea de que existe inversión en este modelo, intuitivamente ¿por qué un país tendría una CC negativa?

Sol:

Si la economía extranjera tiene un gráfico similar, entonces tiene una tasa de autarquía r_a^* que puede ser mayor o menor que r_a . El diferencial de tasa se vería así



Luego, y como se vio en clases, al ser ambas economías abiertas, ambas economías pueden ahorrar/desahorrar entre sí, lo que hace que la tasa de interés internacional (llamemos r_i), se encuentre entre medio de ambas tasas, siendo un promedio ponderado de éstas.

$$r_i = \lambda r_a + (1 - \lambda) r_a^* \quad (0 \leq \lambda \leq 1)$$

Luego, la economía que tenga una $r_a < r_i$ tendrá un superávit en la CC (ie $CC > 0$) y la economía que tenga una tasa de autarquía mayor que la internacional tendrá un déficit de Cuenta Corriente ($CC < 0$) Esto se deberá a que la economía que enfrenta una tasa internacional mayor, le convendrá ahorrar afuera,

es decir, le prestará dinero a la otra economía, puesto que devengará mayores intereses a que si el dinero quedara en la propia economía. Caso contrario es el país que enfrenta una tasa internacional menor que la tasa de autarquía, a este país le convendrá endeudarse con el otro país, puesto que le sale "más barato" que endeudarse en su propio país a r_a

En el caso que presenta inversión el modelo, es claro que una Cuenta Corriente negativa se justifica en el sentido de que deuda en el presente (es decir, $CC < 0$) significa mayores niveles de inversión en el presente para poder tener mayores ingresos mañana. Luego, una deuda del país se justifica en el caso que se ocupe para inversión y así poder aumentar la producción del próximo período, como era en este caso.