Auxiliar 3
IN4203 Macroeconomía

Profesor: Benjamín Villena R.
Auxiliar: Miguel Biron L.
23 de Abril de 2010

Pregunta 1

De la función de producción, vemos que para un nivel de K e Y dado, el trabajo contratado será:

$$L = (YK^{-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Las utilidades corresponden a los ingresos menos los costos de uso de los insumos. Utilizando la fórmula anterior, las utilidades resultan:

$$\Pi = PY - w(YK^{-\alpha})^{\frac{1}{1-\alpha}} - r_K K$$

Maximizar las utilidades es un problema de optimización en una variable (K). La CPO es:

$$\frac{d\Pi}{dK} = 0 = -wY^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{-\alpha}{1-\alpha} \right) K^{\frac{-1}{1-\alpha}}$$

La Condición de Segundo Orden corresponde a ver si Π es cóncava. En efecto:

$$\frac{d^2\Pi}{dK^2} < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \right) wY^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\frac{-1}{1-\alpha} \right) K^{\frac{-(2-\alpha)}{1-\alpha}} < 0$$

Es claro que la expresión es estrictamente negativa, dado por el signo de $\frac{-1}{1-\alpha}$. Por lo tanto, Π tiene un máximo en el conjunto factible.
Resolviendo la CPO para K, obtenemos:

$$K^* = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w}{r_K} \right)^{1-\alpha} Y$$

El anterior resultado corresponde al nivel de capital óptimo que la empresa debe utilizar, de modo de cumplir con la restricción de producir exactamente Y, pero a mínimo costo (o maximizando utilidades). Es el punto donde le gustaría estar a la firma, y escogerá su decisión de inversión de un periodo a otro de modo de llegar a este nivel K^*. Sin embargo, en presencia de costos para la instalación (o desinstalación) de capital, no será necesariamente óptimo realizar una inversión (o desinversión) si la brecha entre el nivel de capital de hoy y el óptimo es muy grande.
En efecto, se propone una función de costos de inversión. El primer término, $(K_{t+1} - K^*)^2$, sugiere que es costoso estar lejos del nivel óptimo. Y mientras más grande sea la desviación, más costosa es (término cuadrático). Por otr lado, el término $(K_{t+1} - K_t)^2$, muestra que es costoso desviarse del nivel de capital que tenemos hoy. Y similarmente, mientras más alta sea la desviación, más costosa es. Por lo tanto, se tiene un trade-off entre, por un lado, instalar de inmediato el capital óptimo, y por otro, minimizar el cambio entre el nivel de capital de hoy y el de mañana.
Si tomamos como dados el capital de hoy K_t, y el nivel de óptimo de capital, minimizamos con respecto a la decisión de cuánto capital tener el siguiente periodo, K_{t+1}. La CPO resulta:

$$\frac{dC}{dK_{t+1}} = 0 = 2\epsilon(K_{t+1} - K^*) + 2(K_{t+1} - K_t)$$

Es claro que los costos son estrictamente convexos, pues es una expresión cuadrática en K_{t+1} y tiene signo positivo en el término cuadrático. Por lo tanto hay un mínimo. Desarrollamos la CPO:

$$\begin{aligned}
(1+\epsilon)K_{t+1} &= \epsilon K^* + K_t \\
(1+\epsilon)(K_{t+1} - K_t) &= \epsilon K^* + K_t - (1+\epsilon)K_t \\
(1+\epsilon)(K_{t+1} - K_t) &= \epsilon(K^* - K_t)
\end{aligned}$$

Finalmente, llamando $I_t = K_{t+1} - K_t$ encontramos una expresión del tipo pedido:

$$I_t = \lambda(\epsilon)(K^* - K_t)$$

donde $\lambda(\epsilon) = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}$. Es decir, la decisión óptima requiere invertir sólo una fracción $\lambda(\epsilon)$ de la brecha que separa a la situación actual con el nivel óptimo de capital. Es importante notar que si $\epsilon \to \infty$, entonces $I_t \to (K^* - K_t)$,es decir, el cambio al nivel óptimo sería instantaneo. Este es el caso en que el costo de instalación es despreciable comparado al costo de estar lejos del nivel óptimo. Por otro lado, $\epsilon \to 0$, entonces $I_t \to 0$. Este caso considera un costo de invertir muy superior al costo de estar lejos del nivel óptimo de capital.

Utilizando los datos de la tabla, podemos calcular el nivel K^* usando la fórmula encontrada anteriormente. Esto resulta:

$$K^* = 4{,}898$$

Ahora para el nuevo precio de uso del capital, $r_K = 0{,}04$, el nuevo nivel óptimo de capital será

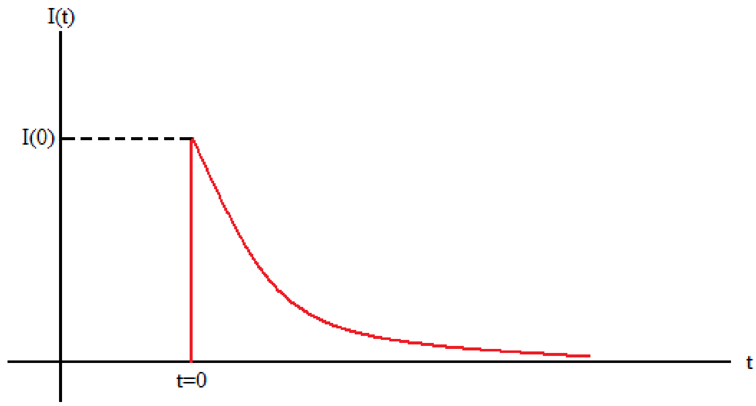
$$K^{**} = 5{,}477$$

Suponiendo que en $t = 0$ nos encontramos con un nivel $K*$, y además ocurre el cambio de precios que modifica el nivel óptimo de capital, debemos calcular la inversión óptima de manera de movernos en la dirección del nuevo nivel óptimo de capital K^{**}. En efecto, usando las fórmulas anteriores podemos calcular I_0 y K_1:

$$\begin{aligned}
I_0 &= \lambda(\epsilon)(K^{**} - K_t) = 0{,}4632 \\
K_1 &= K_0 + I_0 = 5{,}3612
\end{aligned}$$

Podemos ver que existe una brecha $K^{**} - K_1 = 0{,}1158 > 0$. Tal como se vio anteriormente, esto se debe a los costos de inversión.

Para mostrar que el efecto de la baja en el precio de uso del capital provoca un efecto sólamente transitorio en la inversión, podemos ver el siguiente gráfico:



La inversión decrece rápidamente en el tiempo, pues cada vez la brecha con respecto al capital óptimo es menor (ver fórmula de la inversión). Por lo tanto, después de un tiempo, la inversión vuelve a ser cero, tal como era antes del aumento de precio del capital. Es decir, el cambio es transitorio, y dura hasta que se alcance el nuevo nivel K^{**}.

Pregunta 2

$$
\begin{aligned}
c_K &= P_t - P_{t+1}\frac{(1-\delta)}{1+r} \\
&= P_t\left(1 - \frac{P_{t+1}}{P_t}\frac{(1-\delta)}{1+r}\right) \\
&= P_t\left(1 - \frac{(1+\pi_{t+1})(1-\delta)}{1+r}\right)
\end{aligned}
$$

Usando que si a y b son tasas de crecimiento o decerecimiento suficientemente pequeñas, entonces

$$ab \approx 0$$

Si además multiplicamos la fracción dentro del paréntesis arriba y abajo por $1-r$ se obtiene

$$
\begin{aligned}
c_K &= P_t\left(1 - \frac{(1+\pi_{t+1})(1-\delta)(1-r)}{1-r^2}\right) \\
&\approx P_t\left(1 - (1 + \pi_{t+1} - \delta - r)\right) \\
&= P_t\left(r + \delta - \pi_{t+1})\right)
\end{aligned}
$$

Si asumimos que existen muchas compañías que ofrecen el servicio de arriendo, entonces es claro que si una de ellas cobra más que c_K, entonces vendrá otra que cobrará un ϵ menos y se llevará sus clientes. Incluso si no hubiese tanta competencia, pero las firmas que usan el capital tuviesen acceso a comprar las máquinas, no les convendría pagar más que c_K, pues en ese caso les conviene más comprar la máquina. Por otro lado, las compañías de arriendo no podrían cobrar menos, porque si lo hicieran, harían utilidades negativas.

Pregunta 3

Una primera interpretación de la q es la siguiente: q corresponde al valor marginal de una unidad de capital, es decir es el valor actualizado de todos los beneficios marginales que se anticipan en el futuro para la empresa (que se obtendrán con esa unidad de capital). Una segunda interpretación es que q corresponde al ratio del valor de una unidad de capital dentro de la empresa (q) sobre su costo de reemplazamiento (que asumimos igual a 1), es decir el valor de una unidad de capital fuera de la empresa. Por lo tanto, el valor de q nos define los incentivos para invertir de la empresa: si $q > 1$, la empresa invierte puesto que el valor del capital es mayor dentro de la empresa y si $q < 1$, la empresa vende su capital.