Pauta Auxiliar 2
IN4203 Macroeconomía

Profesor: Benjamín Villena R.
Auxiliar: Miguel Biron L.
16 de Abril de 2010

Pregunta 1

Planteamos el problema de maximización:

$$\max_{c_1,c_2} u(c_1) + \frac{1}{1+\delta} u(c_2)$$

s.a

$$W \geq c_1 + \frac{1}{1+r} c_2$$

donde $W = y_1 + \frac{1}{1+r} y_2$ es la riqueza total del individuo en valor presente. Con esto, el lagrangeano queda:

$$\mathcal{L} = u(c_1) + \frac{1}{1+\delta} u(c_2) + \lambda(W - (c_1 + \frac{1}{1+r} c_2))$$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 = u'(c_1) - \lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2} = 0 = \frac{1}{1+\delta} u'(c_2) + \frac{1}{1+r} \lambda$$

Si eliminamos λ, obtenemos la Ecuación de Euler:

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)} = \frac{1+r}{1+\delta}$$

Ahora, dada la forma funcional para la utilidad $u(c) = log(c)$, podemos expresar lo anterior de la siguiente manera:

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{1+r}{1+\delta}$$

Utilizando esta última ecuación junto a la restricción presupuestaria, podemos encontrar los patrones de consumo en función de los parámetros del problema:

$$c_1 = \frac{1+\delta}{2+\delta} W$$
$$c_2 = \frac{1+r}{2+\delta} W$$

Podemos calcular el valor de W utilizando los datos del problema, y con esto también tendremos los valores de c_1 y c_2:

$$W = 1154{,}205$$
$$c_1 = 590{,}953$$
$$c_2 = 601{,}340$$

Finalmente, el nivel de utilidad del individuo, que llamaremos U_0, será igual a:

$$U_0 = logc_1 + \frac{1}{1+\delta} logc_2 = 5{,}418$$

Una vez que ocurrido el shock en la economía del alza de la tasa de interés, el individuo debe maximizar tal cómo lo hizo antes del shock, por lo que llegará a una ecuación de Euler similar al caso anterior, pero para las nuevas variables:

$$\frac{c_2'}{c_1'} = \frac{1+r'}{1+\delta}$$

Ahora, si queremos calcular la riqueza del individuo de modo que mantenga el mismo nivel de utilidad que el caso anterior, podemos calcular los consumos que debiera tener de modo de alcanzar tal nivel de utilidad, y luego calcular la riqueza que se necesita de modo de efectivamente poder obtener tales consumos. Por lo tanto, debemos igualar la utilidad total del individuo en el caso del alza de la tasa de interés, con la utilidad que recibía antes. Esto es:

$$U_0 = logc_1' + \frac{1}{1+\delta} logc_2'$$

Utilizando la nueva ecuación de Euler, podemos reemplazar c_2' para obtener una expresión para c_1':

$$\begin{aligned}
U_0 &= logc_1' + \frac{1}{1+\delta} log(c_1'(\frac{1+r}{1+\delta})) \\
e^{U_0} &= c_1'(\frac{1+r'}{1+\delta})^{\frac{1}{1+\delta}} (c_1')^{\frac{1}{1+\delta}} \\
e^{U_0} &= (\frac{1+r'}{1+\delta})^{\frac{1}{1+\delta}} (c_1')^{\frac{2+\delta}{1+\delta}} \\
(c_1')^{\frac{2+\delta}{1+\delta}} &= e^{U_0}(\frac{1+\delta}{1+r'})^{\frac{1}{1+\delta}} \\
c_1' &= e^{U_0 \frac{1+\delta}{2+\delta}} (\frac{1+\delta}{1+r'})^{\frac{1}{2+\delta}}
\end{aligned}$$

Teniendo c_1', podemos obtener c_2' utilizando Euler. Así, los valores para los nuevos consumos son:

$$c_1' = 15{,}679$$
$$c_2' = 16{,}426$$

Por lo tranto, la nueva riqueza total que permite mantener el mismo nivel de utilidad anterior será:

$$W' = c_1' + \frac{1}{1+r'}c_2' = 32{,}105$$

Finalmente, ΔW será:

$$\Delta W = W' - W = 32{,}105 - 1154{,}205 = -1122{,}099$$

Es decir, a este individuo en particular, el aumento de tasa de interés lo llevó a tener una utilidad mayor, pues se le debe quitar riqueza de modo que mantenga un nivel de utilidad igual al que tenía antes del shock de precios.

Pregunta 2

El problema de maximización es el siguiente:

$$\max_{c_1, c_2^H, c_2^L} u_(c_1) + \frac{1}{1+\delta}(\pi u(c_2^H) + (1-\pi)u(c_2^L))$$

s.a

$$y_1 + \frac{1}{1+r}\left[\pi(Y+\epsilon) + (1-\pi)(Y-\epsilon)\right] - c_1 - \frac{1}{1+r}\left[\pi c_2^H + (1-\pi)c_2^L\right] \geq 0$$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 = u'(c_1) - \lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2^H} = 0 = \frac{\pi u'(c_2^H)}{1+\delta} - \frac{\pi\lambda}{1+r}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2^L} = 0 = \frac{(1-\pi)u'(c_2^L)}{1+\delta} - \frac{(1-\pi)\lambda}{1+r}$$

El enunciado dice considerar $\delta = r$, por lo que las tres ecuaciones se reducen a:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = 0 = u'(c_1) - \lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2^H} = 0 = u'(c_2^H) - \lambda$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_2^L} = 0 = u'(c_2^L) - \lambda$$

De esto se concluye que:

$$u'(c_1) = u'(c_2^H) = u'(c_2^L)$$

Y dado que u'(c) es estrictamente decreciente, y por lo tanto inyectiva, se tendrá que:

$$c_1 = c_2^H = c_2^L = c$$

Es decir, el patrón de consumo es constante, no sólo a través del tiempo, sino a través de los estados de la naturaleza. El consumidor suaviza el consumo debido a su aversión al riesgo. Utilizando la restricción presupuestaria podemos encontrar una expresión para c:

$$\begin{aligned}
Y + \frac{1}{1+r}\left[\pi(Y+\epsilon) + (1-\pi)(Y-\epsilon)\right] &= c + \frac{c}{1+r} \\
Y + \frac{1}{1+r}\left[\pi(Y+\epsilon) + (1-\pi)(Y-\epsilon)\right] &= c\frac{2+r}{1+r}
\end{aligned}$$

Despejando para c:

$$\begin{aligned}
c &= \frac{1+r}{2+r}Y + \frac{1}{2+r}\left[\pi(Y+\epsilon) + (1-\pi)(Y-\epsilon)\right] \\
c &= \frac{1+r}{2+r}Y + \frac{1}{2+r}\left[2\pi\epsilon + Y - \epsilon\right]
\end{aligned}$$

Ahora, nos piden calcular el ahorro, definido como $S = Y_1 - c_1$. Utilizando lo anterior, nos queda que:

$$\begin{aligned}
S &= (1 - \frac{1+r}{2+r})Y - \frac{1}{2+r}\left[2\pi\epsilon + Y - \epsilon\right] \\
S &= \frac{1}{2+r}Y - \frac{1}{2+r}\left[2\pi\epsilon + Y - \epsilon\right] \\
S &= \frac{1}{2+r}\left[Y - 2\pi\epsilon - Y + \epsilon\right] \\
S &= \frac{\epsilon}{2+r}\left[1 - 2\pi\right]
\end{aligned}$$

No es difícil mostrar que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[Y_2\right] &= \epsilon(2\pi - 1) + Y \\
Var\left[Y_2\right] &= 4\pi(1-\pi)\epsilon^2
\end{aligned}$$

Con esto, podemos escribir la expresión del ahorro de la siguiente forma:

$$S = \frac{-\mathbb{E}\left[Y_2\right] + Y}{1+r}$$

Supongamos que $\pi > 1/2$. En este caso, el expresión para el ahorro dice que el individuo pedirá prestado. Cuando π aumenta, el valor esperado de Y_2 aumenta, y su varianza disminuye (la varianza es máxima en $\pi = 1/2$). Estos dos efectos apuntan en el mismo sentido: el individuo se endeuda más

porque, primero, espera ganar más en el segundo periodo, y segundo, el futuro es menos incierto, por lo que no necesita protegerse tanto del riesgo, y por lo tanto puede ahorrar menos (o endeudarse más). Ahora, si ϵ aumenta, ocurren dos efectos: el valor esperado de Y_2 aumenta (dado que $\pi > 1/2$), pero por otro lado, la varianza aumenta. Estos efectos son opuestos, el primero lo hace endeudarse más, y el segundo, menos. El efecto total es claro al ver la fórmula del ahorro: el individuo se endeuda más.
Supongamos que $\pi < 1/2$. En este caso, el expresión para el ahorro dice que el individuo ahorrará. Cuando π aumenta, el valor esperado de Y_2 aumenta, y su varianza también. Nuevamente, los efectos son contrarios. Un mayor valor esperado del ingreso hace ahorrar menos, pero un aumento en la varianza hace ahorrar más. Es claro que el efecto de la esperanza es el que vuelve a predominar y por eso es que el individuo ahorra menos. Ahora, si ϵ aumenta, ocurren otra vez dos efectos: el valor esperado de Y_2 disminuye, y la varianza aumenta. Ambos efectos apuntan en la misma dirección y llevan al individuo a endeudarse más.
En resumen, el ahorro del individuo no variará a menos que cambie la esperanza del ingreso en el segundo periodo. Si su varianza cambia, pero el valor esperado se mantiene, el efecto sobre el ahorro será nulo. En otras palabras, el individuo sólo se ve afectado por cambios en la renta permanente, pero no sobre la renta transitoria. Esto se puede explicar por la existencia de un seguro implícito frente a todas las eventualidades. El individuo puede asegurarse contra todos los estados de la naturaleza, sean estos buenos o malos. Este supuesto es irreal, porque en general no es posible preveer todos los estados de la naturaleza. Y de hecho, de los que se podrían preveer, hay algunos para los que es imposible escribir un contrato. Es más realista, entonces, suponer un activo que transfiere riqueza intertemporalmente, pero no a través de estados de la naturaleza.

Pregunta 3

Resolvemos el problema del individuo:

$$\max_{c_1,c_2,a_1,a_2} u(c_1) + \frac{1}{1+\delta}\mathbb{E}\left[u(c_2)\right]$$

S.a

$$\begin{aligned} a_0(1+r) + y_1 &= c_1 + a_1 \\ a_1(1+r) + y_2 &= c_2 + a_2 \\ a_1 &\geq -b \end{aligned}$$

Podemos notar dos cosas: a_2 debe ser cero, pues no tiene sentido guardar riqueza si la utilidad es estrictamente creciente en el consumo. Segundo, y considerando lo anterior, podemos expresar c_1 y c_2 sólo en función de a_1. Con esto, el problema queda:

$$\max_{a_1} u(a_0(1+r) + y_1 - a_1) + \frac{1}{1+\delta}\mathbb{E}\left[u(a_1(1+r) + y_2)\right]$$

S.a

$$a_1 \geq -b$$

CPO:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a_1} = 0 = -u'(c_1) + \frac{1}{1+\delta}\mathbb{E}\left[(1+r)u(c_2)\right] + \lambda$$

Si $\delta = r$ (enunciado), se tendrá:

$$u'(c_1) = \mathbb{E}\left[u(c_2)\right] + \lambda$$

De las condiciones de KKT, tenemos la holgura complementaria de la restricción:

$$\lambda(a_1 + b) = 0$$

Es decir, o bien la restricción es activa, o bien $\lambda = 0$. Por lo tanto, para los individuos que se encuentran en el límite de su crédito, la restricción será activa, y por lo tanto se tendrá que $\lambda > 0$. Así, la ecuación de Euler no se cumplirá con igualdad:

$$u'(c_1) > \mathbb{E}\left[u(c_2)\right]$$

Ahora, asumiendo que la utilidad marginal es convexa ($u'''(c) > 0$), podemos usar la desigualdad de Jensen, que dice que si $g(x)$ es convexa, entonces:

$$\mathbb{E}\left[g(x)\right] \geq g(\mathbb{E}\left[x\right])$$

Así, se obtendrá que:

$$u'(c_1) > u'(\mathbb{E}\left[c_2\right])$$

Y como $u'(c)$ es inyectiva, esto implica que:

$$c_1 < \mathbb{E}\left[c_2\right]$$

Podemos concluir que un individuo que se ve afectado por la restricción crediticia, no podrá suavizar el consumo como le gustaría en otro caso. El individuo ahorra más de lo que debiera en el periodo 1; es por esto que su consumo en ese periodo es menor que en el segundo. La razón de este sobre ahorro es que el individuo ve como posible un escenario que le gustaría evitar a toda costa, que es consumir cero en el segundo periodo. Esto lo podemos ver de la restricción presupuestaria, asumiendo $a_1 = -b$:

$$c_2 = -b(1+r) + y_2$$

La condición para que $c_2 \leq 0$ es:

$$y_2 \leq b(1+r)$$

Si el individuo ve que dentro del espacio de realizaciones posibles para y_2 hay valores menores que $b(1+r)$, entonces para evitar la situación de consumo nulo, preferirá consumir menos en el periodo 1 de modo de tener una probabilidad mayor de un consumo positivo en el segundo. La figura 1 muestra, para un individuo afecto a la restricción de liquidez, tanto la disminución en la utilidad, como el sobre ahorro (su consumo en el segundo periodo es mayor de lo que sería si no existiese la restricción).

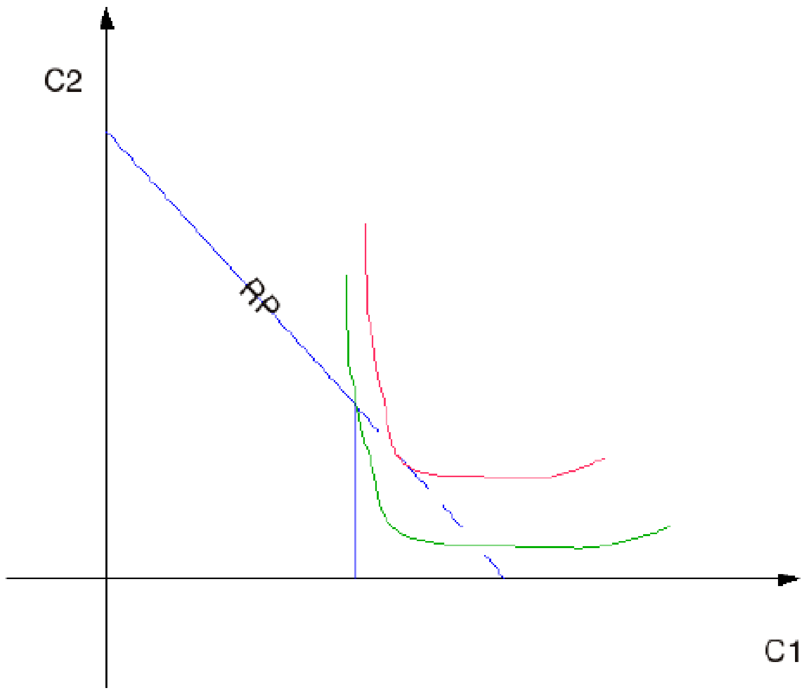

Figura 1: Efecto de la Restricción de Liquidez