

Auxiliar 11: Teoría de Colas

Martes 29 de Junio de 2010

Problema 1

Una tienda de mascotas tiene C jaulas en las que puede mantener perros a la venta de las más variadas razas. El tiempo que transcurre para que cada perro sea vendido está exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ [días], independiente de la venta de los otros perros de la tienda.

Para abastecerse de nuevas mascotas, la tienda cuenta con dos criaderos proveedores: uno permanente y otro de reserva. El proveedor permanente envía nuevas mascotas a la tienda de acuerdo a un proceso de Poisson de tasa λ [mascotas/días]. Si en algún momento del tiempo, la cantidad de perros en la tienda disminuye a R unidades o menos, entonces se contratará adicionalmente a un segundo criadero, complementario al anterior, para que mande nuevas mascotas. La llegada de estas mascotas constituye también un proceso de Poisson de tasa λ [mascotas/días]. Este contrato será válido mientras no se recupere el nivel de R mascotas en la tienda.

1. Formule una cadena de Markov a tiempo continuo que modele la situación recién descrita.
2. Formule un sistema de ecuaciones que permita encontrar las probabilidades estacionarias. Calcule el valor de dichas probabilidades.
3. Cuanto espera en promedio un perro en la tienda antes de ser vendido?.
4. Suponga que P es el precio de los perros y por cada día que ellos están en la tienda se gasta K por conceptos de comida y servicio de veterinaria. Formule el problema de optimización que permite al dueño de la tienda encontrar el R que maximiza sus utilidades por unidad de tiempo.

Problema 2

Una empresa generadora de energía eléctrica desea evaluar su capacidad de respuesta frente a posibles fallas en las centrales generadoras que posee dentro del país.

Esta empresa posee N centrales generadoras a lo largo de Chile, las cuales permiten abastecer adecuadamente la demanda energética del país. Cada una de las centrales mencionadas puede trabajar sin sufrir fallas durante un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\lambda$ horas. Cuando ocurre una falla en una o más centrales entra en funciones un procedimiento de contingencia, el cual redistribuye la producción energética, permitiendo que el sistema opere satisfactoriamente.

Para hacer frente a las fallas, cada central cuenta con un equipo de personal especializado en reparación, el cual demora un tiempo exponencialmente distribuido de media $1/\mu$ horas en restablecer la producción energética de la central afectada.

1. Modele el número de centrales en reparación como una Cadena de Markov de tiempo continuo. Determine si existen probabilidades de estado estacionario justificando su respuesta. Plantee las ecuaciones necesarias para calcular las probabilidades estacionarias.
2. En promedio ¿cuánto demora en ser reparada una central que falla y deja de operar?.
3. Calcule el número de fallas por unidad de tiempo que afectan al sistema generador de energía.
4. Usando la Fórmula de Little, calcule el número promedio de centrales en estado de falla.
5. ¿Cuál es la probabilidad de encontrar detenida en el largo plazo a una central en particular?.

Problema 3

A una fiesta muy particular asisten M parejas. Cada pareja toma la decisión de ir a la pista de baile independiente de las demás. El tiempo que pasa hasta que cada pareja se decide a salir a bailar es una variable aleatoria de distribución exponencial de parámetro $\lambda(1/\text{min})$. Por otro lado, el tiempo que permanece cada pareja bailando es una variable aleatoria de distribución exponencial de media $1/\mu(\text{min})$.

Cuando una pareja deja de bailar inicia un nuevo proceso para decidir si salir a la pista nuevamente (con la misma distribución de probabilidades), y así sucesivamente.

Por último suponga que la capacidad de la pista es suficiente, como para que todas las parejas este bailando al mismo tiempo, y que la fiesta dura por mucho tiempo.

1. Modele la cantidad de parejas bailando en cualquier instante como una Cadena de Markov en tiempo Continuo.
2. Justifique la existencia de probabilidades estacionarias y encuentre las expresiones que le permitan calcularlas.

En lo que sigue considere que las probabilidades estacionarias toman valores conocidos.

3. El número promedio de parejas que se encuentran en la pista en un instante cualquiera.
4. La probabilidad de que exista igual número de parejas bailando y sentadas en un instante cualquiera.
5. La tasa media de ingreso de parejas a la pista.
6. La tasa media de salida de parejas desde la pista de baile.

Problema 4

Un centro de información telefónica cuenta con dos telefonistas cuyo tiempo de atención de llamadas es idénticamente distribuido y corresponde a una distribución exponencial de media igual a 1 minuto.

Dado que la operación de este call center está recién comenzando, no se cuenta con suficientes datos históricos como para determinar la distribución de probabilidad de la entrada de llamadas, aunque se puede suponer que los tiempos entre estas son exponenciales. Además, en los pocos días de funcionamiento se ha advertido que el 10 % del tiempo ambas operadoras están desocupadas.

Si una persona llama y ambas operadoras están ocupadas su llamada quedará en espera hasta que alguna se desocupe y pueda atenderlo. Suponiendo que no existe una restricción sobre el número de llamadas que pueden quedar en espera, y que los clientes son infinitamente pacientes, responda:

1. ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario?.
2. Determine la tasa de entrada de llamadas (λ).
3. Calcule el número promedio de llamadas en espera y el tiempo promedio de espera de un cliente antes de ser atendido.

Suponga ahora que las operadoras cuando ven que hay llamadas en espera apuran las atenciones. Los tiempos de atención siguen siendo variables aleatorias exponenciales, pero ahora la tasa con que una operadora atiende a un cliente cuando hay i clientes esperado es $i \cdot \mu$.

4. ¿Qué condición hay que imponer sobre la tasa de entrada de llamadas para que exista estado estacionario? Explique.
5. Determine la ecuación que permitiría calcular la tasa de entrada de llamadas λ .