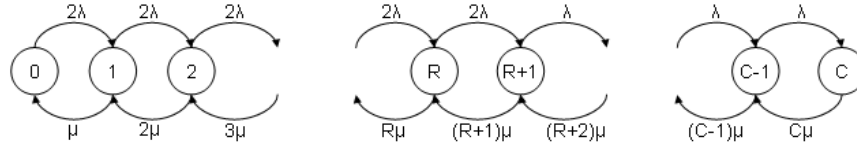


## Pauta Auxiliar 11

Martes 29 de Junio de 2010

### Problema 1

1. El estado del sistema corresponde a la cantidad de mascotas presentes. Con esto, el modelo de markov se muestra en la figura.



Más formalmente, para este modelo, las probabilidades de transición pueden escribirse como:

$$q_{i,i-1} = i\mu$$

$$q_{i,i+1} = \begin{cases} 2\lambda & i \leq R \\ \lambda & i > R \end{cases}$$

2. El sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \lambda_i \pi_i &= \mu_{i+1} \pi_{i+1} & i = 0 \\ (2\lambda + i\mu) \pi_i &= 2\lambda \pi_{i-1} + (i+1)\mu \pi_{i+1} & 0 < i < R+1 \\ (\lambda + i\mu) \pi_i &= 2\lambda \pi_{i-1} + (i+1)\mu \pi_{i+1} & i = R+1 \\ (\lambda + i\mu) \pi_i &= \lambda \pi_{i-1} + (i+1)\mu \pi_{i+1} & C \geq i > R+1 \end{aligned}$$

Como es un proceso de nacimiento y muerte, podemos aplicar que:

$$\pi_i = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \pi_0 \quad \pi_0 = \left( 1 + \sum_{n=1}^C \frac{\lambda_0 \lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \mu_2 \cdots \mu_n} \right)^{-1}$$

Luego, las probabilidades estacionarias para este problema vienen dadas por:

$$\pi_i = \begin{cases} \frac{(2\lambda)^i}{i! \mu^i} \pi_0 & i \leq R+1 \\ \frac{2^{R+1} (\lambda)^i}{i! \mu^i} \pi_0 & i > R+1 \end{cases} \quad \text{donde } \pi_0 = \left( 1 + \sum_{n=1}^{R+1} \frac{(2\lambda)^i}{i! \mu^i} + \sum_{i=R+2}^C \frac{2^{R+1} (\lambda)^i}{i! \mu^i} \right)^{-1}$$

3. Calculamos la cantidad promedio de perros en la tienda:

$$L = \sum_{i=0}^c i \pi_i$$

Luego aplicamos la fórmula de little para obtener el tiempo de espera medio:

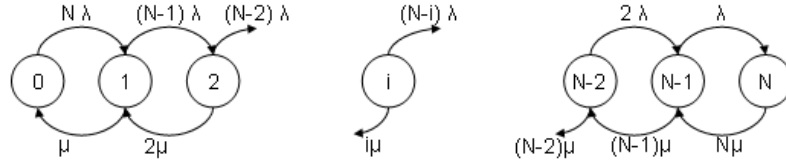
$$W = \frac{1}{\tilde{\lambda}} L \quad \text{con } \tilde{\lambda} = 2\lambda \left( \sum_{i=0}^R \pi_i \right) + \lambda \left( \sum_{i=R+1}^C \pi_i \right)$$

4. El problema de optimización viene dado por:

$$\begin{aligned} \max_R \quad & \sum_{i=0}^C \pi_i (i(\mu P - K)) \\ \text{s.a} \quad & R \leq C \\ & R \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

## Problema 2

1. La cadena que modela el número de centrales en reparación se muestra en la figura (las tasas de transición son las especificadas en la figura).



Para esta cadena basta que las tasas  $\lambda$  y  $\mu$  sean mayores que 0 para que exista estado estacionario.<sup>1</sup>

Dado que este es un proceso de nacimiento y muerte, las probabilidades estacionarias toman la siguiente forma:

$$\pi_k = \binom{N}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \cdot \pi_0$$

Donde:

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^N \binom{N}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}$$

Reconociendo el binomio de Newton se llega a:

$$\pi_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^N}$$

2. En promedio las Centrales demoran  $\frac{1}{\mu}$  horas en ser reparadas<sup>2</sup>
3. El número de fallas por unidad de tiempo será:

$$E(\text{Fallas/hora}) = \sum_{k=0}^N \pi_k \cdot \lambda \cdot (N - k) = N \cdot \lambda - \sum_{k=0}^N \frac{\binom{N}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k}{\left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)^N} \cdot \lambda \cdot k$$

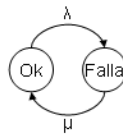
Factorizando por  $\lambda$  y reconociendo la forma de la esperanza de una binomial  $(N, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})$ , se llega al siguiente resultado:

$$E(\text{Fallas/hora}) = \lambda \cdot N \cdot \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right) = \lambda \cdot N \cdot \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

4. Little dice  $L = W \cdot \bar{\lambda}$ . En la parte b se calculó  $W$ . En la parte d se calculó  $\bar{\lambda}$ . Entonces ocupando nuestros sofisticados conocimientos algebraicos se tiene:

$$L = \frac{N \cdot \lambda}{\lambda + \mu}$$

5. Para responder esta pregunta existen muchas alternativas (intuición, Teoría de renovación, suerte, etc.). En esta pseudo-pauta construiremos una cadena que represente el estado de un Central en particular. La cadena se muestra en la figura.



<sup>1</sup>Dado que la cadena es finita e irreducible

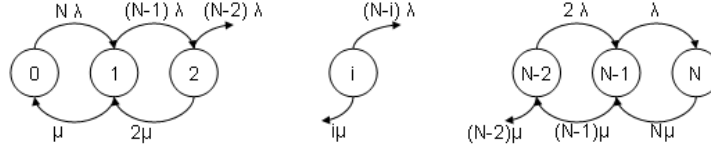
<sup>2</sup>Lo dice el enunciado!!

Resolviendo el pseudo-sistema de ecuaciones se tiene que:

$$\pi_{falla} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

### Problema 3

1. Siguiendo el enunciado modelamos la cantidad de parejas bailando en un instante determinado. La cadena resultante se muestra en la figura.



2. En este caso basta con notar que la cadena es finita, por lo tanto tendrá ley de probabilidades estacionarias. Respecto a las expresiones de las mismas utilizamos las fórmulas de los procesos de nacimiento y muerte. De esta forma tendremos que:

$$\begin{aligned}\pi_i &= \frac{M \cdot (M-1) \cdot (M-2) \dots (M-i+1) \cdot \lambda^i}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots i \cdot \mu^i} \cdot \pi_0 \\ &= \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_0\end{aligned}$$

Donde:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= \frac{1}{\sum_{i=1}^M \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i} \\ &= \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^M\end{aligned}$$

Entonces:

$$\pi_i = \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{M-i}$$

Donde reconocemos una distribución binomial de parámetros  $(M, \frac{\lambda}{\lambda + \mu})$

3. El número promedio de parejas bailando simplemente es la esperanza de la binomial, es decir:

$$E[\text{Parejas bailando}] = M \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

4. Inmediatamente nos damos cuenta que si M es impar la probabilidad es 0. Si M es par, entonces:

$$P[\text{Igual número de parejas sentadas que bailando}] = \binom{M}{\frac{M}{2}} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{M}{2}} \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{\frac{M}{2}}$$

5. La tasa media de entrada de parejas a la pista será:

$$\begin{aligned}\text{Tasa}_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot (M-i)\lambda \\ &= \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \left(\frac{\lambda}{\lambda + \mu}\right)^i \cdot \left(\frac{\mu}{\lambda + \mu}\right)^{M-i} \cdot (M-i)\lambda \\ &= M\lambda - M\lambda \cdot \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \\ &= M\lambda \left(\frac{\mu}{\mu + \lambda}\right)\end{aligned}$$

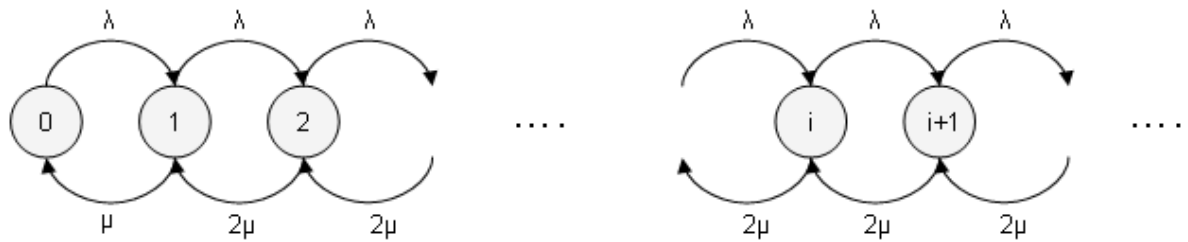
6. La tasa media de salida de parejas de la pista será:

$$\begin{aligned}
 Tasa_{IN} &= \sum_{i=0}^M \pi_i \cdot i \cdot \mu \\
 &= \sum_{i=0}^M \binom{M}{i} \left( \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \right)^i \cdot \left( \frac{\mu}{\lambda + \mu} \right)^{M-i} \cdot i \cdot \mu \\
 &= M\mu \left( \frac{\lambda}{\mu + \lambda} \right)
 \end{aligned}$$

Claramente la tasa media de entrada a la pista es igual a la tasa media de salida de la pista. Si no, no existiría estado estacionario.

## Problema 4

Primero debemos notar que el sistema en cuestión es una cola del tipo M/M/2 con la que se muestra a continuación:



1. Como condición de estado estacionario debemos imponer que:

$$\frac{\lambda}{2 \cdot \mu}$$

2. Los resultados para la M/M/2 son conocidos:

$$\pi_i = 2 \cdot \rho^i \cdot \pi_0 \quad i \neq 0$$

Donde:

$$\begin{aligned}
 \pi_0 &= \frac{1}{1 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i} \\
 \pi_0 &= \frac{1 - \rho}{1 + \rho}
 \end{aligned}$$

$$\text{con } \rho = \frac{\lambda}{2 \cdot \mu}.$$

Por otro lado, del enunciado sabemos que  $\pi_0 = 0,1$  Por lo tanto igualando términos obtenemos que:

$$\frac{1 - \rho}{1 + \rho} = 0,1 \Rightarrow \lambda \approx 1,64$$

3. Si calculamos el número medio de personas en el sistema, tendremos que:

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k \cdot k = \frac{\rho}{1 - \rho^2}$$

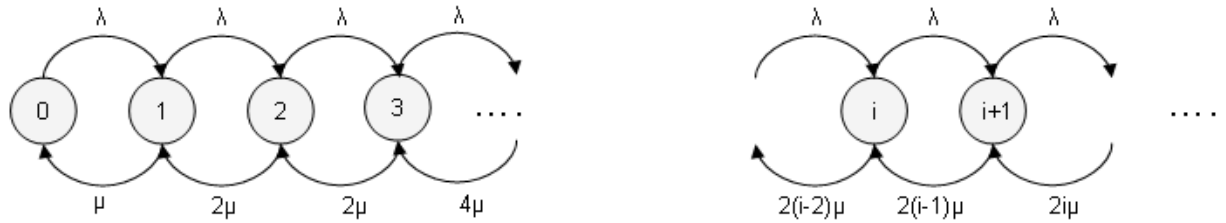
Entonces utilizando Little tendremos que:

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho}{(1 - \rho) \cdot \lambda}$$

Pero este W es el tiempo promedio en el sistema, entonces tenemos que restarle el tiempo de atención. Entonces el tiempo promedio de espera será:

$$W_{Cola} = W - \frac{1}{\mu}$$

4. En este caso la cadena toma la siguiente forma:



Claramente aquí no hay que imponer condición de estado estacionario (dado que la tasa de atención aumenta indefinidamente a medida que el sistema se llena, mientras que la tasa de llegada permanece constante)

5. Las ecuaciones de estado estacionario(nacimiento y muerte) son las siguientes:

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu} \pi_0$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 \pi_0$$

$$\pi_i = \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i \prod_{k=3}^i \frac{1}{2(k-2)} \quad i > 2$$

Con:

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + \sum_{i=3}^{\infty} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^i \prod_{k=3}^i \frac{1}{2(k-2)}}$$

Ahora si igualamos la expresión de  $\pi_0$  al valor dado (0.1) obtendríamos el valor de  $\lambda$  (mismo procedimiento que en la parte anterior).