IN3702: Investigación Operativa
**Profs:** J. Correa, R. Epstein
**Auxs:** S. Astroza, N. Inostroza, L.F Solari, C. Thraves

# Pauta Control 2 Otoño 2010

**Tiempo:** 2.5 Horas

## Problema 1

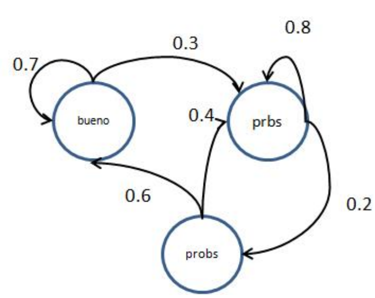
Un taxi puede encontrarse en tres situaciones: el taxi funciona bien y genera ganancias diarias de 50.000 pesos (descontando gastos); un caso intermedio, donde el taxi presenta problemas y obtiene ganancias de 20.000 pesos/día; y el caso donde el taxi definitivamente no funciona. Se estima que cuando el taxi está funcionando bien, con probabilidad 0.7 lo segirá estando al día siguente y que con probabilidad 0.3 pasará a presentar problemas. A su vez, de presentar problemas, se sabe que con probabilidad 0.8 el taxi mantendrá su condición al día siguiente y con probabilidad 0.2 dejará de funcionar.

Cuando el taxi no funciona debe ser reparado, lo que toma un día y cuesta 200.000 pesos. Sin embargo, un taxi recién reparado funciona bien con probabilidad 0.6 y presenta problemas con probabilidad 0.4.

1. `(2 puntos)` Modele el sistema anterior como una Cadena de Markov y verifique si la cadena es ergódica.
2. `(4 puntos)` Calcule las probabilidades estacionarias asociadas al problema y determine las ganancias esperadas diarias en el largo plazo.

**Solución**

1. `(2 puntos)` La cadena queda como sigue:




Para verificar que es ergódica basta argumentar que se trata de una Cadena de Markov con una sola clase recurrente y aperiódica.

2. `(4 puntos)` Para encontrar las probabilidades estacionarias, resolvemos $\pi = \pi P$ imponiendo además que $\sum_i \pi_i = 1$. Donde P representa la matriz de transición entre estados:

$$P= \begin{vmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.6 & 0.4 & 0 \end{vmatrix}$$

Resolviendo para $\pi$, obtenemos:

$$[\pi_1, \pi_2, \pi_3] = [0{,}25; 0{,}625; 0{,}125]$$

Luego, el beneficio esperado en el largo plazo, queda como sigue:

$$\mathbf{E}\left\{BeneficioLP\right\} = \sum_i \pi_i B_i = 0{,}25 * 50 + 0{,}625 * 20 + 0{,}125 * (-200) = \mathbf{0}$$

## Problema 2

La empresa ABC produce galletas con M&Ms. El dispensador de M&Ms está funcionando de forma irregular por lo que el número de M&Ms que caen del dispensador sigue una distribución de Poisson de tasa 5[MM/seg]. Se sabe que la línea donde se transportan las galletas, es tal que cada galleta avanza una posición por segundo y que no existe espacio entre éstas (van todas juntas, una detrás de la otra).

1. `(1.2 puntos)` ¿Cuál es la probabilidad que una galleta cualquiera tenga al menos un M&M? **Solución:**

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{N(1) \geq 1\right\} &= 1 - \mathbf{P}\left\{N(1) = 0\right\} \\ &= 1 - e^{-\lambda}\end{aligned}$$

2. `(1.2 puntos)` ¿Cuál es la probabilidad que una caja con K galletas tenga el mismo número de M&Ms que el valor promedio de M&Ms que tendría una caja con N galletas?

   **Solución:** Calculemos, primero, el valor promedio de M&Ms que tendría una caja de n galletas:

$$\mathbf{E}\left\{N_1(1) + N_2(1) + ... + N_n(1)\right\} = \sum_{i=1,\dots,n} \mathbf{E}\left\{N_i(1)\right\} = n\lambda$$

   Donde $N_i(1)$ representa el número de M&Ms de la i-ésima galleta

   Veamos, ahora, la probabilidad que una caja con K galletas, tenga exactamente $n\lambda$ M&Ms:

$$\mathbf{P}\left\{N(K) = n\lambda\right\} = \frac{e^{-\lambda K} * (\lambda K)^{\lambda n}}{(\lambda n)!}$$

3. `(1.2 puntos)` Si se sabe que las primeras 4 galletas que pasaron por el dispensador, tienen un total de 25 M&Ms. Calcule la probabilidad que la tercera galleta haya recibido 3 m&ms.

   **Solución:**

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left\{N(3) - N(2) = 3 | N(4) = 25\right\} &= \mathbf{P}\left\{N(1) = 3 | N(4) = 25\right\} \\ &= \frac{\mathbf{P}\left\{N(4) = 25 | N(1) = 3\right\}\mathbf{P}\left\{N(1) = 3\right\}}{\mathbf{P}\left\{N(4) = 25\right\}} \\ &= \frac{\mathbf{P}\left\{N(3) = 22\right\}\mathbf{P}\left\{N(1) = 3\right\}}{\mathbf{P}\left\{N(4) = 25\right\}} \\ &= \left(\frac{25!}{22!3!}\right)\left(\frac{3}{4}\right)^{22}\left(\frac{1}{4}\right)^{3}\end{aligned}$$

4. `(1.2 puntos)` ¿Cuál es la probabilidad que un M&M elegido al azar caiga en una galleta con 4 M&M?

   **Solución:** Denominando T al momento en que cae el M&M, con $T \in [0, 1]$, podemos calcular la probabilidad que hayan otros 3M&Ms en la misma galleta.

$$\mathbf{P}\left\{\text{Caigan 3 M\&Ms más en la misma galleta} | \text{M\&M Cayó en instante T}\right\} = \mathbf{P}\left\{N(T) + N(1-T) = 3\right\}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!}$$

Lo que no depende del tiempo T en el que haya caído la galleta. Luego, como T distribuye uniforme en $[0, 1]$, sabemos que el resultado encontrado representa la probabilidad que un M&M caiga en una galleta con 4 M&Ms.

5. `(1.2 puntos)` Suponga que la empresa utiliza M&Ms solamente de 2 colores: amarillos y rojos, los que compra en una proporción de 1:2 respectivamente. Calcule la probabilidad de que una galleta cualquiera tenga 2 M&Ms rojos y 2 amarillos.

   **Solución:**

   Tenemos una División de un Proceso de Poisson. Luego, la caída de M&Ms amarillos seguirá un Proceso de Poisson de tasa $\frac{\lambda}{3}$. Por su parte, la caída de M&Ms rojos seguirá una Proceso de Poisson de tasa $\frac{2\lambda}{3}$. Se demostró en clases la independencia de estos dos procesos.

$$\mathbf{P}\left\{N_{Amarillo}(1) = 2 \wedge N_{Rojo}(1) = 2\right\} = \frac{e^{-\frac{\lambda}{3}}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2}{2!} * \frac{e^{-\frac{2\lambda}{3}}\left(\frac{2\lambda}{3}\right)^2}{2!}$$
$$= \frac{e^{-\lambda}}{4}\left(\frac{2\lambda}{3}\right)^2\left(\frac{\lambda}{3}\right)^2$$

## Problema 3

En el aeropuerto de una importante ciudad, los pasajeros llegan según un proceso de Poisson de tasa $\lambda$ (pasajeros/minuto). La aduana del aeropuerto tiene la política de revisar a todos los pasajeros según un estricto orden de llegada.

La aduana puede revisar sólo un pasajero a la vez y demora exactamente 1 minuto en completar el proceso de revisión de un pasajero. El proceso de revisión de la aduana, de cualquier pasajero, comienza en el segundo 0 de cada minuto, es decir, cuando comienza el minuto. Por ejemplo, si un pasajero llega a la aduana en la mitad de un minuto, aunque la aduana esté vacía, deberá esperar que se inicie el siguiente minuto para iniciar la revisión. Esta espera, la realiza el pasajero en la aduana (y no en la sala de espera que explicamos a continuación).

La aduana dispone de una sala de espera, que se utiliza cuando llega un pasajero y la aduana está ocupada con un pasajero que llegó con anterioridad. Esta sala de espera es pequeña y tiene capacidad para sólo un pasajero.

Cuando se termina de revisar a un pasajero en la aduana, se verifica si hay alguien esperando en la sala. En caso positivo, el pasajero de la sala de espera se deriva inmediatamente a la aduana donde se le revisa y la sala de espera queda vacía.

Si al llegar un pasajero, la sala de espera está llena, la aduana declara copada su capacidad y el pasajero se retira del aeropuerto sin ser revisado por aduana. Esta práctica obedece a la política de dar un buen servicio a los pasajeros del aeropuerto.

1. `(2 puntos)` Modele el sistema de revision y sala de espera con una cadena de Markov a tiempo discreto, usando intervalos de 1 minuto. Utilice una cadena de markov de tres estados y determine las probabilidades de transicion en funcion de $\lambda$.

   **Solución:**

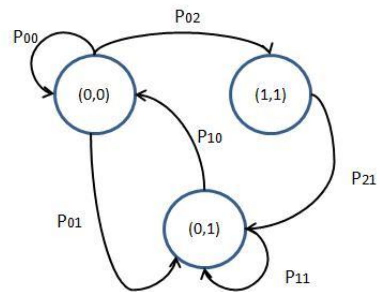
   En lo sucesivo, nos referiremos al estado del sistema como un par ordenado $(e, a)$ con $e, a \in \{0, 1\}$, donde «e» representará el número de personas en la sala de espera y «a» el número correspondiente en la aduana.

   Notemos que si miramos el sistema en tiempo 0, tal que ya se ha hecho el cambio de las personas que esperaban por entrar a la aduana, sólo podrán observarse 3 estados posibles. En efecto, el estado $(1, 0)$ no podrá darse nunca dado los supuestos del problema.

   Luego, podemos dibujar la siguiente Cadena de Markov finita y ergódica:

   Calculemos, entonces, las probabilidades de Transición:

   $P_{00} = \mathbf{P}\left\{N(1) = 0\right\} = e^{-\lambda}$




$P_{01} = \mathbf{P}\{N(1) = 1\} = \lambda e^{-\lambda}$
$P_{02} = \mathbf{P}\{N(1) \geq 2\} = 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}$
$P_{10} = \mathbf{P}\{N(1) = 0\} = e^{-\lambda}$
$P_{11} = \mathbf{P}\{N(1) \geq 1\} = 1 - e^{-\lambda}$
$P_{21} = 1$

2. `(4 puntos)` Considere que Ud. llega al aeropuerto en un momento cualquiera del largo plazo, calcule la probabilidad que lo revisen en la aduana.

**Solución:**

Notemos que la CM admite probabilidades estacionarias, las que denominaremos:

$$\pi = [\pi_0, \pi_1, \pi_2]$$

Donde $\pi$ resuelve:

$$\pi = \pi P$$
$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1$$

Luego, la probabilidad de ser revisados viene dada por:

$$\mathbf{P}\{SerRevisado\} = \pi_0 \mathbf{P}\{\text{Llegar } 1^{\text{o}} \text{ o } 2^{\text{o}}\} + \pi_1 \mathbf{P}\{Llegar 1^{\text{o}}\}$$

Así, debemos calcular:

$\mathbf{P}\{\text{Llegar } 1^{\text{o}}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\text{Llegar } 1^{\text{o}} | \text{Llegan k Pasajeros Más}\} \mathbf{P}\{\text{Llegan k Pasajeros Más}\}$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda}\right)$$

Análogamente,

$\mathbf{P}\{\text{Llegar } 2^{\text{o}}\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P}\{\text{Llegar } 2^{\text{o}} | \text{Llegan k Pasajeros Más}\} \mathbf{P}\{\text{Llegan k Pasajeros Más}\}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}\right)$$

Luego, la probabilidad pedida es:

$$\mathbf{P}\{SerRevisado\} = \pi_0 \left(\left(1 - e^{-\lambda}\right) + \left(1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda}\right)\right) + \pi_1 \left(1 - e^{-\lambda}\right)$$