IN3702: Investigación Operativa
**Profs:** J. Correa, R. Epstein
**Auxs:** S. Astroza, L.F Solari, C. Thraves, N. Inostroza

# Pauta CTP 3

**Tiempo:** 1 Hora

Suponga que existe un terminal de buses exclusivo para viajar a la ciudad de Rancagua. Los pasajeros llegan a este terminal según un proceso de Poisson de tasa $\mu[personas/hora]$. Se sabe, además, que en el terminal existen dos andenes, A y B, uno para cada servicio ofrecido para realizar el viaje. Suponga que una vez en el terminal, los pasajeros eligen el servicio A con probabilidad p, y el servicio B, con 1-p.

1. `(1 punto)` ¿Cuál es la probabilidad que lleguen k pasajeros al andén B durante la primera hora? Y que lleguen más que k pasajeros? En promedio, cuántos pasajeros llegarán al andén B la primera hora?

   Solución: Se trata de una división de un Proceso de Poisson. Sabemos que las llegadas al andén B, siguen un proceso de Poisson de tasa $\lambda(1-p)$.

   $$P(N_B(1) = k) = \frac{e^{-\lambda(1-p)} * (\lambda(1-p))^k}{k!}$$

   Luego,

   $$P(N_B(1) \geq k) = \sum_{j \geq k} \frac{e^{-\lambda(1-p)} * (\lambda(1-p))^j}{j!}$$

   Finalmente, la esperanza de un proceso de Poisson de tasa $\lambda(1-p) * 1$

   $$E(N_B(1)) = \lambda(1-p)$$

2. `(1 punto)`Si se sabe que en la primera hora han llegado 100 pasajeros al terminal, determine la probabilidad de que k de ellos hayan escogido el servicio A.

   Solución:

   $$\begin{aligned} P[N_A(1) = k | N(1) = 100] &= \frac{P[N(1) = 100 | N_A(1) = k] * P[N_A(1) = k]}{P[N(1) = 100]} \\ &= \frac{P[N_B(1) = 100 - k] * P[N_A(1) = k]}{P[N(1) = 100]} \\ &= \frac{\left(\frac{e^{-\lambda(1-p)} * (\lambda(1-p))^{100-k}}{(100-k)!}\right) * \left(\frac{e^{-\lambda p} * (\lambda p)^k}{k!}\right)}{\frac{e^{-\lambda} * (\lambda)^{100}}{100!}} \\ &= \frac{100!}{(100-k)!k!} * p^k * (1-p)^{100-k} \end{aligned}$$

3. `(1 punto)`Considerando nuevamente que llegaron 100 pasajeros en la primera hora, calcule la probabilidad que en la primera media hora hayan llegado k pasajeros al andén A.

   Solución:

$$
\begin{aligned}
P[N_A^{0,5} = k \,/\, N(1) = 100] &= \frac{P[N_A(0{,}5) = k \,\wedge\, N(0{,}5) + N_B(0{,}5) = 100 - k]}{P[N(1) = 100]} \\
&= \frac{P[N_A(0{,}5) = k] \cdot P[N^\star(0{,}5) = 100 - k]}{P[N(1) = 100]} \\
&= \frac{\frac{(\lambda\frac{p}{2})^k \cdot e^{-(\lambda\frac{p}{2})}}{k!} \cdot \frac{(\lambda(1-\frac{p}{2}))^{100-k} \cdot e^{-\lambda(1-\frac{p}{2})}}{(100-k)!}}{\frac{(\lambda)^{100} \cdot e^{-\lambda}}{100!}} \\
&= \frac{100!}{(100-k)!k!} \cdot \left(\frac{p}{2}\right)^k \cdot \left(1 - \frac{p}{2}\right)^{100-k}
\end{aligned}
$$

En lo sucesivo, se pensará en 1 solo andén para simplificar los cálculos. Suponga, ahora, que los buses llegan al paradero según un proceso de Poisson de tasa $\lambda[buses/hora]$. Al llegar cada bus, todos los pasajeros que se encuentran esperando, se suben instantáneamente a él (Supondremos capacidad infinita para cada bus) y los pasajeros que llegan posteriormente deben esperar al siguiente bus.

4. `(0.5 punto)` Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al m-ésimo bus, dado que el tiempo de llegada entre el bus m-1 y m es T.

   Solución:

   Sea $N_m$ = Número de personas que se suben al m-ésimo bus. Sea $x_m$ = tiempo entre llagada del bus m-1 y el m-ésimo.

$$P(N_m = k | X_m = T) = P(N(T) = k) = \frac{e^{-\lambda T} * (\lambda T)^k}{k!}$$

5. `(1 punto)` Encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al m-ésimo bus.

   Hint: Le puede resultar útil saber que la densidad de la función $gamma(n, \theta)$ está dada por:

$$f_{n,\theta}(t) = \theta e^{-(\theta * t)} \frac{(\theta * t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

   Solución:

$$
\begin{aligned}
P(N_m = k) &= \int_{T \geq 0} P(N_m = k | X_m = T) * f_x(T) dT \\
&= \int_{T \geq 0} \frac{e^{-\lambda T} * (\lambda T)^k}{k!} * (\mu e^{-\mu T}) dT \\
&= \frac{\mu \lambda^k}{(\mu + \lambda)^{k+1}} \int_{T \geq 0} \frac{e^{-(\mu+\lambda)T} * (\mu + \lambda)^{k+1} T^k}{k!} dT
\end{aligned}
$$

   Dado que lo que queda dentro de la integral es la densidad de probabilidad de una Gamma$(k+1, (\mu+\lambda))$ se tiene que:

$$P(N_m = k) = \frac{\mu \lambda^k}{(\mu + \lambda)^{k+1}}$$

6. `(1 punto)` Dado que un bus llega a las 10:30 AM y no llegan buses entre las 10:30 y las 11:00 AM, encuentre la función de probabilidad del número de pasajeros que se suben al siguiente bus.

   Solución:

   Si un bus llega a las 10:30 y no llegan buses entre 10:30 y 11:00, el número de pasajeros que se subirá al próximo bus será N1 + N2 donde:

   N1= Número de personas que se sube entre 10:30 y 11:00.

N2= Número de personas que se sube después de las 11:00

$$P[N_m = n] = \sum_{0\leq j\leq n} P[N1 = j \wedge N2 = n-j]$$

$$= \sum_{0\leq j\leq n} P[N1 = j] * P[N2 = n-j]$$

$$= \sum_{0\leq j\leq n} (\frac{e^{-(\lambda/2)}(\lambda/2)^j}{j!}) * (\frac{\mu\lambda^{n-j}}{(\mu+\lambda)^{n-j+1}})$$

$$= \frac{e^{-(\lambda/2)}\mu}{(\mu+\lambda)} \sum_{0\leq j\leq n} \frac{(\lambda/2)^j\lambda^{n-j}}{j!(\mu+\lambda)^{n-j}}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda/2)}\mu\lambda^n}{(\mu+\lambda)^{n+1}} \sum_{0\leq j\leq n} (\frac{(\mu+\lambda)}{2})^j \frac{1}{j!}$$

7. `(0.5 punto)`Suponga que en la ciudad de Origen, existe una población de N personas. Cada hora, la probabilidad que una de estas personas se dirija al terminal se ha estimado en un valor promedio de $\sigma_N = \frac{A}{N} + \frac{B}{N^2}$. Si se sabe se trata de una ciudad MUY grande, ¿Cómo podría modelar el proceso de llegada? Justifique detalladamente su respuesta.

   Solución:

   Calculemos la probabilidad que lleguen k personas al terminal:

$$P[N = k] = \frac{N!}{(N-k)!k!} * p^k(1-p)^N - k$$

   Resultado que corresonde a la función de probabilidad de una binomial

   Ahora definimos $\lambda_N = N * \sigma_N$

   Notemos, entonces, que podemos reescribir la probabilidad como:

$$P[N = k] = \frac{N * (N-1) * \cdots * (N-k+1)}{k!} * p^k(1-p)^N - k$$

$$= \frac{N^k * (1-\frac{1}{N}) * (1-\frac{2}{N}) * ... * (1-\frac{N-k+1}{N})}{k!} * (\frac{\lambda_N}{N})^k * \frac{(1-\frac{\lambda_N}{N})^N}{(1-\frac{\lambda_N}{N})^k}$$

   Notando que $\lambda_N \approx A$ para N suficientemente grandes, podemos aproximar la probabilidad pedida (Haciendo tender N a infinito) según:

$$P[N = k] \approx \frac{A^k e^{-A}}{k!}$$

   Se concluye que para N suficientemente grandes, se puede aproximar una distribución binomial$(N, \sigma)$ con un proceso de Poisson de tasa $\lambda = N\sigma$