

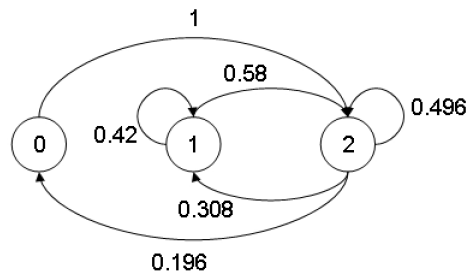


Pauta Auxiliar 8: Cadenas de Markov Discretas

Martes 1 de Junio de 2010

Problema 1

1. Es posible dado que el número de autos disponibles al comienzo de un día cualquiera sólo depende de la cantidad de autos disponibles al comienzo del día anterior y esto es suficiente para determinar la evolución del sistema (en probabilidades).
2. La cadena toma se muestra en la figura.



Cálculo de las probabilidades de transición:

$$P_{0,2} = 1 \quad (\text{Si no tengo taxis disponibles con seguridad ambos estarán disponibles mañana}).$$

$$P_{1,2} = [P(D = 1) + P(D \geq 2)] \cdot P[\text{No falle}] + P(D = 0) = 0,58$$

$$P_{1,0} = 0 \quad (\text{Por lo menos tengo bueno, la mañana siguiente, el auto en reparación})$$

$$P_{1,1} = 1 - 0,58 = 0,42$$

$$P_{2,0} = P(D \geq 2) \cdot P[\text{Ambos autos fallen}] = 0,196$$

$$P_{2,1} = P(D = 1) \cdot P[\text{Auto falle}] + 2 \cdot P(D \geq 2) \cdot P[\text{Uno falla y el otro no}] = 0,308$$

$$P_{2,2} = P(D = 0) + P(D = 1) \cdot P[\text{Auto no falle}] + P[D \geq 2] \cdot P[\text{No falle ninguno}] = 0,496$$

Entonces la matriz de transición es la siguiente:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0,42 & 0,58 \\ 0,196 & 0,308 & 0,496 \end{vmatrix}$$

Existe sólo una clase recurrente aperiódica compuesta por todos los estados de la cadena.

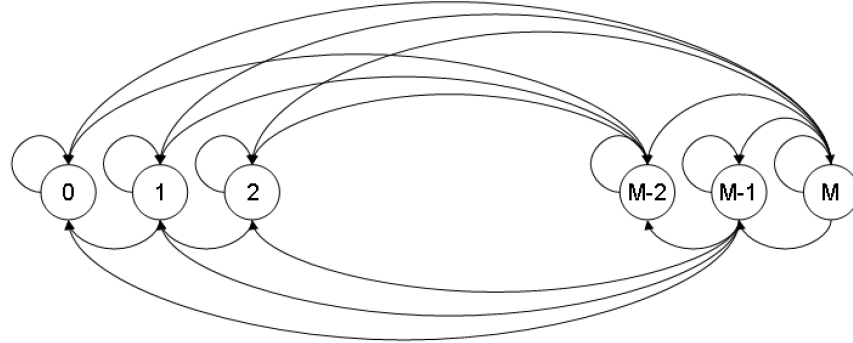
Problema 2

1. La situación claramente puede ser modelada como una cadena de Markov en tiempo discreto debido a que si defino los estados como el número de pacientes que quedan en el centro en un día, entonces todas las probabilidades de transición pueden ser determinadas a partir de esta información. De esta forma se tiene que:

- El estado i será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \dots, M\}$.
- Las probabilidades de transición quedan determinadas por la siguiente formula¹:

$$P(i, j) = P(\text{ir del estado } i \text{ al estado } j) = \begin{cases} \frac{i!}{(i-j)!j!} p^{i-j} \cdot (1-p)^j & \text{si } M \geq i \geq j \geq 0 \\ 0 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

La cadena se muestra a continuación en la figura.

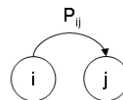


- Existen $M + 1$ clases distintas: 1 recurrente compuesta por el estado 0, y M clases transientes compuestas cada una por uno de los M estados restantes. Recuerdar que una clase está compuesta por todos los estados comunicados entre sí, y en este caso ningún estado se comunica con otro.
2. Primero necesitamos encontrar la probabilidad de eventualmente pasar por el estado $M - 1$. Para calcular esta probabilidad vemos que de pasar por este estado, la transición debe lograrse en algún número de períodos. Por esto se tiene que:

$$\begin{aligned} P(\text{Pasar por el estado } M-1) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Pasar por } M-1 \text{ en } i \text{ transiciones}) \\ P(\text{Pasar por el estado } M-1) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(\text{Quedarme en } M \text{ por } i-1 \text{ transiciones}) \cdot P(M, M-1) \\ P(\text{Pasar por el estado } M-1) &= \sum_{i=1}^{\infty} (1-p)^{M(i-1)} \cdot M \cdot p \cdot (1-p)^{M-1} \\ P(\text{Pasar por el estado } M-1) &= \frac{M(1-p)^{M-1}p}{1 - (1-p)^M} \end{aligned}$$

Por otro lado, la probabilidad de instalar los equipos algún día es equivalente a la probabilidad de llegar alguna vez al estado 0. Sin embargo dado que esta es una cadena ergódica, se que en el largo plazo con seguridad estaré en la clase recurrente. Como en este caso la clase recurrente está compuesta por el estado 0, se puede decir con seguridad (Probabilidad =1) que en el largo plazo el sistema llegará al estado 0 y por lo tanto se podrán instalar los equipos.

3. En este caso se tiene un número C de camas disponibles y existe la posibilidad que llegue gente al centro asistencial. La cadena asociada se muestra en la figura .



- El estado i será la situación en que quedan i pacientes enfermos en el centro, $\forall i \in \{0, \dots, M\}$.

¹Esto es equivalente a definir la matriz de transición P .

- Para calcular la probabilidad de transición entre dos estados cualesquiera condicionaremos sobre el número de personas que se recuperan.
Entonces, para $j \neq C$:

$$P(i, j) = \sum_{k=0}^i P(i, j | \text{Se mejoran } k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k (1-p)^{i-k}$$

- Sin embargo:

$$P(i, j | \text{Se mejoran } k \text{ personas}) = P(\text{lleguen } j - i + k \text{ personas})$$

siempre y cuando $j - i + k \geq 0$, entonces:

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i P(\text{lleguen } j - i + k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}$$

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i q_{j-i+k} \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}$$

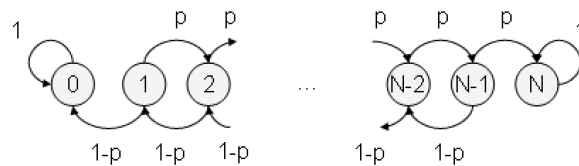
- De la misma forma, si $j = C$, entonces:

$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i P(\text{lleguen más de } j - i + k \text{ personas}) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}$$

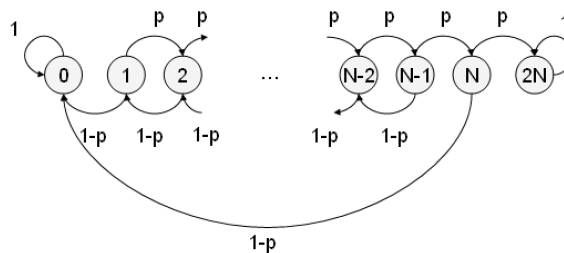
$$P(i, j) = \sum_{k=\max(i-j, 0)}^i \left(\sum_{z=j-i+k}^{\infty} q_z \right) \cdot \frac{i!}{k!(i-k)!} p^k \cdot (1-p)^{i-k}$$

Problema 3

1. La cadena es la siguiente:



2. La cadena es la siguiente:



3. Sea:

$$f_i = P[\text{Ganar dado que parto con } i \text{ unidades}]$$

Inmediatamente vemos que $f_0 = 0$ y que $f_N = 1$. De la misma forma vemos (condicionando en el resultado de la primera apuesta) que:

$$f_i = \frac{1}{2}f_{i+1} + \frac{1}{2}f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = f_i - f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = f_1$$

Ahora si sumamos las $N - 1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = (N - 1) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{N}$$

De la misma forma si sumamos las $i - 1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = i \cdot f_1 = \frac{i}{N}$$

4. Para el caso general procederemos exactamente como lo hicimos para el caso particular:

$$f_i = p \cdot f_{i+1} + (1 - p) \cdot f_{i-1} \quad \forall 0 < i < N$$

lo que implica que:

$$f_{i+1} - f_i = \rho(f_i - f_{i-1}) \quad \forall 0 < i < N$$

Donde $\rho = \frac{1-p}{p}$ La primera ecuación nos dice que:

$$f_2 - f_1 = \rho f_1$$

Utilizando esto vemos que:

$$f_i - f_{i-1} = \rho^{i-1} f_1$$

Ahora si sumamos las $N - 1$ primeras ecuaciones tendremos que (utilizando la suma telescópica):

$$f_N - f_1 = \left(\sum_{i=1}^{N-1} \rho^i \right) \cdot f_1 \Rightarrow f_1 = \frac{1}{\sum_{i=0}^{N-1} \rho^i} = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^N}$$

De la misma forma si sumamos las $i - 1$ primeras restricciones veremos que:

$$f_i = \left(\sum_{k=0}^{i-1} \rho^k \right) \cdot f_1 = \frac{1 - \rho^i}{1 - \rho^N}$$

5. a) Una forma es modelar exactamente como la ruina del jugador con fortuna M y estados absorbentes 0 y M . Al estado 0 se llega cuando Ud., el auxiliar, está en la primera prueba y “se devuelve”. En este caso hay 3 clases: $\{0\}$, $\{M\}$ recurrentes y la clase $\{1, 2, \dots, M-1\}$ que es una clase transiente.
- b) Claramente, la única forma de que el alumno M obtenga nota superior a 2.0 es que Ud. alcance acorregir la prueba de ese alumno.

Dada la analogía a la ruina del jugador que estamos haciendo, se puede usar (o deducir) la fórmula para f_1 : *Probabilidad de llegar a estado M , dado que partí en estado 1*, en los casos $p = \frac{1}{2}$ y $p \neq \frac{1}{2}$.

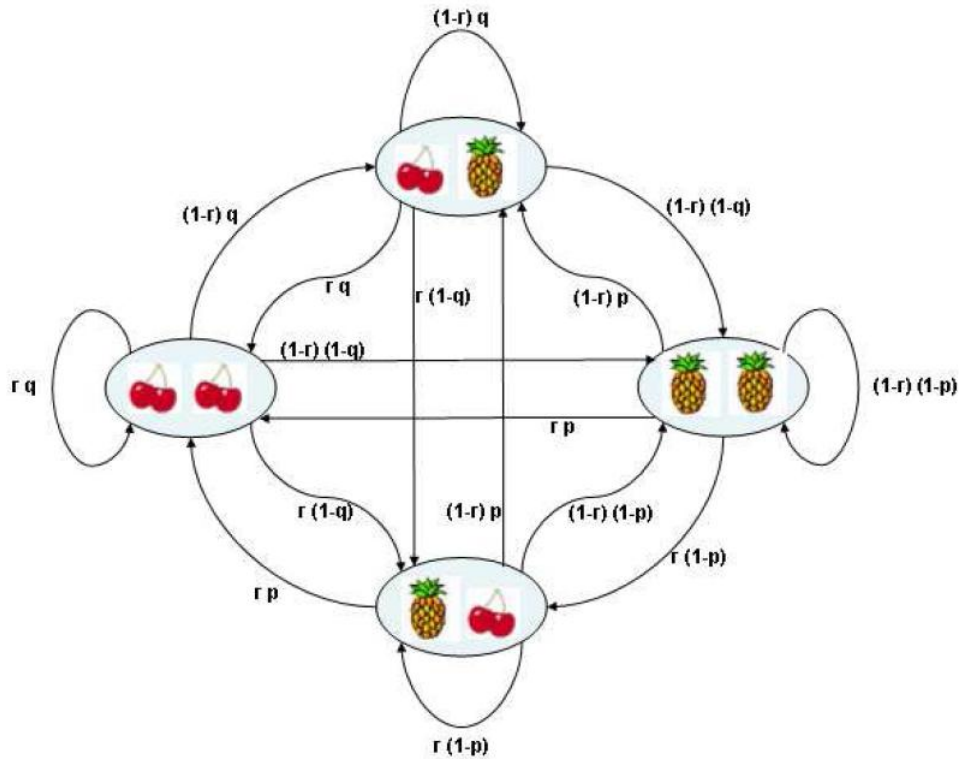
$$f_1 = \begin{cases} \frac{1}{M} & p = \frac{1}{2} \\ \frac{1 - \frac{1-p}{p}}{1 - \frac{1-p}{p}^M} & p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

c) Condicionaremos en la última prueba corregida por el auxiliar:

$$\begin{aligned}
 E(\text{Nota } M) &= E(\text{Nota/ultima es 1}) \cdot Pr(\text{ultima es 1}) + E(\text{Nota/ultima es } M) \cdot Pr(\text{ultima es } M) \\
 &= 1 \cdot Pr(\text{ultima es 1}) + E(\text{Nota asignada}) \cdot Pr(\text{ultima es } M) \\
 &= (1 - f_1) + \left(\sum_{j=2}^7 j \cdot q_j \right) \cdot f_1
 \end{aligned}$$

Problema 4

1. Los estados y las probabilidades de transición entre ellos son los que se indican en el siguiente grafo:



Vemos que existe una única clase recurrente, aperiódica, conformada por la totalidad de los estados de la cadena. Las probabilidades de transición deben ser justificadas por separado.

2. Existe una única clase recurrente, aperiódica, por lo tanto existirá una ley de probabilidades estacionarias. Para encontrar el valor de estas probabilidades simplemente calculamos una ley estable (la única):

$$\begin{aligned}
 P_{GG} &= r \cdot q \cdot P_{GG} + r \cdot q \cdot P_{GP} + r \cdot p \cdot P_{PG} + r \cdot p \cdot P_{PP} \\
 P_{GP} &= (1-r) \cdot q \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot q \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot p \cdot P_{PP} \\
 P_{PG} &= r \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + r \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + r \cdot (1-p) \cdot P_{PP} \\
 P_{PP} &= (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GG} + (1-r) \cdot (1-q) \cdot P_{GP} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PG} + (1-r) \cdot (1-p) \cdot P_{PP} \\
 1 &= P_{GG} + P_{GP} + P_{PG} + P_{PP}
 \end{aligned}$$

3. Dado que la máquina ha sido utilizada por mucho tiempo podemos suponer que hemos alcanzado el estado estacionario (recuerden que no miramos la situación actual del traga monedas). De esta manera la

distribución de probabilidades del resultado de mi tirada será la distribución de la ley de probabilidades estacionarias. Entonces, la probabilidad de ganar es la probabilidad de encontrar la máquina en un estado donde ambos símbolos sean iguales y además realizar la elección correcta. Esto es:

$$\begin{aligned} P[Ganar] &= P[\text{Escoger Guinda-Guinda}] \cdot P_{GG} + P[\text{Escoger Piña-Piña}] \cdot P_{PP} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP}) \end{aligned}$$

Entonces:

$$E[Utilidades] = \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP}) \cdot G - [1 - \frac{1}{2} \cdot (P_{GG} + P_{PP})] \cdot (C + T)$$

4. Nuevamente, dado que la máquina lleva mucho tiempo funcionando suponemos que el resultado de la próxima tirada se rige de acuerdo a la ley de probabilidades estacionarias. Si es así, los únicos estados que nos permiten obtener una ganancia son los estados Guinda-Piña y Piña-Guinda. Entonces:

$$P[ganar] = P_{GP} + P_{PG}$$

De esta forma:

$$E[Utilidades] = P_{GP} + P_{PG} \cdot G - [1 - P_{GP} + P_{PG}] \cdot (C + T) - W$$