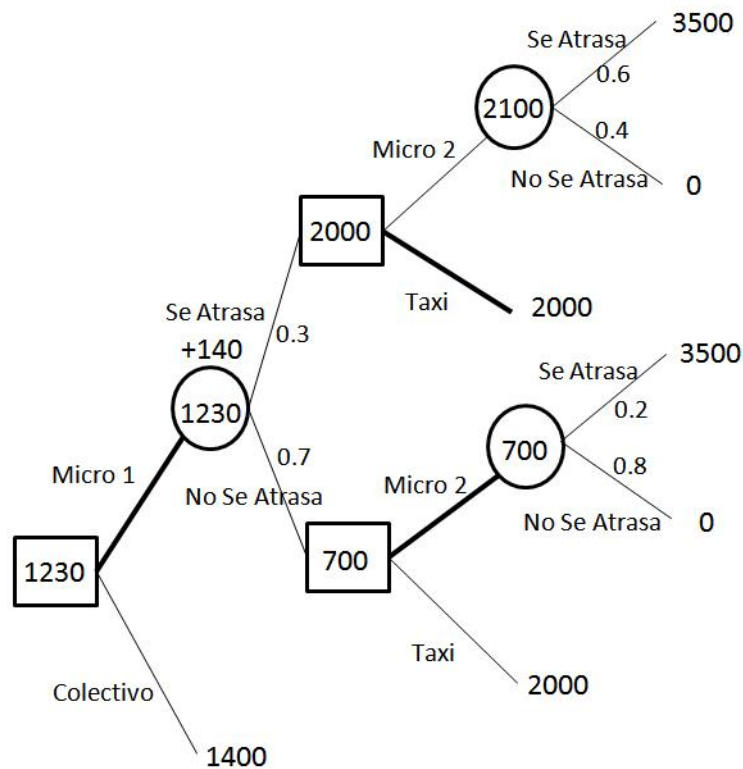




Pauta Control 1
Martes 4 de Mayo de 2010

Problema 1

a) (3 puntos)



Deben indicar claramente las decisiones óptimas en el árbol o escribirlas explícitamente en algún otro lugar de su respuesta.

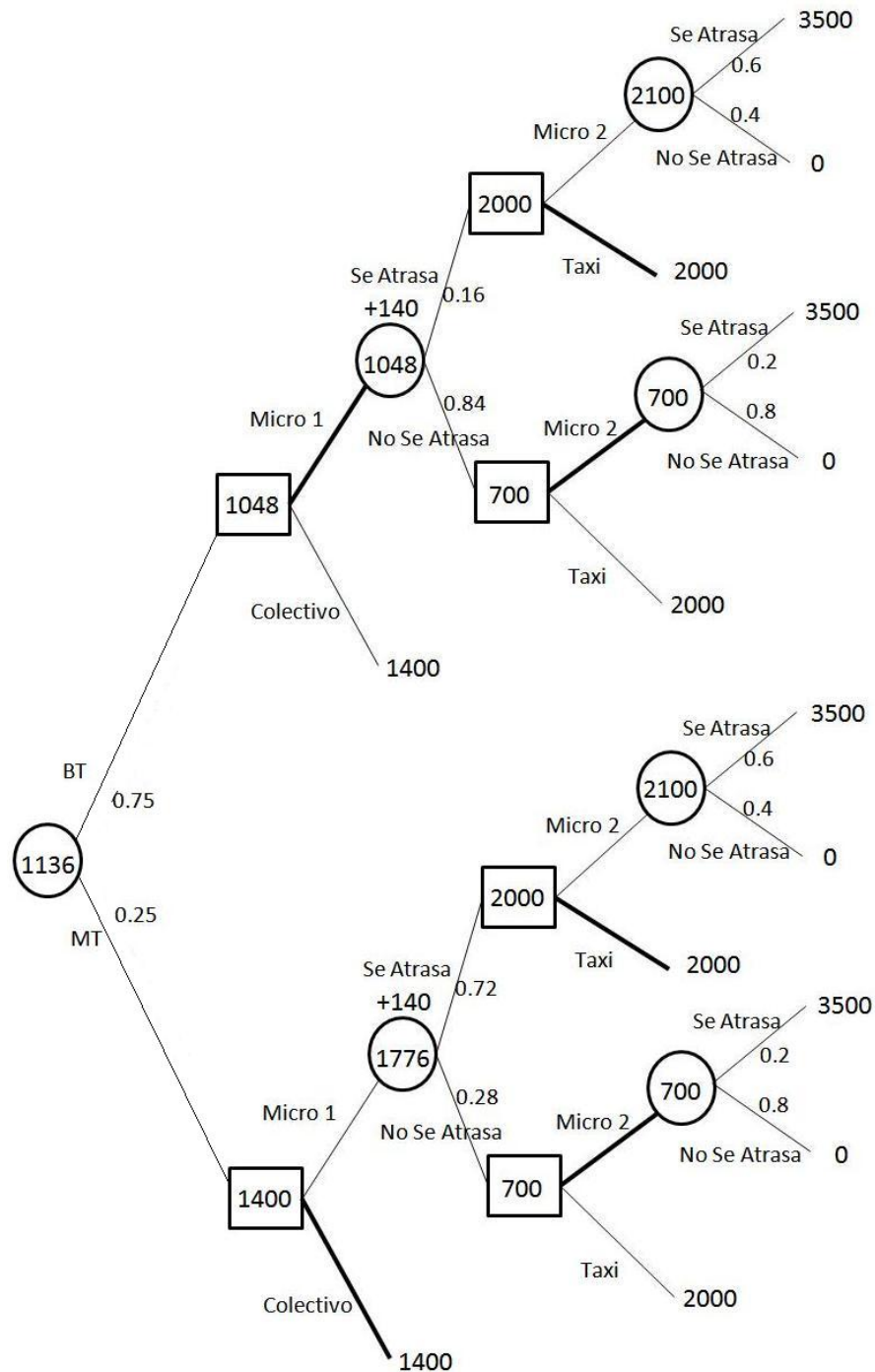
b) (3 puntos) Para calcular el valor de la información provista por la UOCT, vamos a plantear un árbol que incluya los resultados de la aplicación. Para esto se necesitan las probabilidades de que la micro 1 se atrase ($M1SA$) o no ($M1NA$), condicionada en la información de la aplicación y las probabilidades de que prediga un “Buen Tráfico” (BT) o un “Mal Tráfico” (MT). Es decir, las probabilidades que necesitamos y no tenemos son $P(BT)$, $P(M1SA|BT)$ y $P(M1SA|MT)$:

$$\begin{aligned} P(BT) &= P(BT|M1SA)P(M1SA) + P(BT|M1NA)P(M1NA) \\ &= 0,4 \cdot 0,3 + 0,9 \cdot 0,7 \\ &= 0,75 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(M1NA|BT) &= \frac{P(BT|M1NA) \cdot P(M1NA)}{P(BT)} \\ &= \frac{0,9 \cdot 0,7}{0,75} \\ &= 0,84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(M1NA|MT) &= \frac{P(MT|M1NA) \cdot P(M1NA)}{P(MT)} \\
 &= \frac{0,1 \cdot 0,7}{0,25} \\
 &= 0,28
 \end{aligned}$$

Una vez calculadas las probabilidades, podemos plantear y resolver el árbol asociado a esta parte, que se muestra en la figura:



El estudiante está dispuesto a pagar $1230 - 1136 = 94\$$ por ocupar la aplicación.

Problema 2

a) (4 puntos) Un modelo para determinar la política de compra es el siguiente:

- **Etapas**

Cada uno de los meses: $t = 1, \dots, T$

- **Variables de Estado**

I_t : número de botellas en buenas condiciones y en bodega al inicio del mes t .

- **Variables de Decisión**

x_t : número de botellas compradas en el mes t .

- **Variables Aleatorias**

La demanda que se observa es aleatoria. Entonces definimos la variable d_t como la demanda en el mes t .

La distribución de d_t está dada por $P(d_t = k) = p(k, t)$.

El número de botellas rotas (r_t) es también una variable aleatoria cuya distribución es $P(r_t = k) = \binom{I_t}{k} q^k (1-q)^{I_t-k} \equiv q(t, l)$

- **Recurrencias**

Las variables de estado se actualizan de acuerdo a las siguiente recurrencia:

$$I_{t+1} = \max \{I_t + x_t - d_t - r_t, 0\}$$

- **Función de Beneficio Acumulado**

$$\begin{aligned} & V_t(I_t, x_t) \\ &= \mathbb{E}_{d_t, r_t} \left[C \min \{I_t + x_t - r_t, d_t\} - b x_t - u \max \{I_t + x_t - d_t - r_t, 0\} + V_{t+1}^*(I_{t+1}) \right] \\ &= \mathbb{E}_{r_t} \left[\sum_{k=0}^{I_t + x_t - r_t} p(k, t) \left(C k - u(I_t + x_t - k - r_t) + V_{t+1}^*(I_t + x_t - k - r_t) \right) + \sum_{k=I_t + x_t - r_t + 1}^{\infty} p(k, t) \left(C(I_t + x_t - r_t) + V_{t+1}^*(0) \right) - b x_t \right] \\ &= \sum_{l=0}^{I_t} \binom{I_t}{l} q^l (1-q)^{I_t-l} \left[\sum_{k=0}^{I_t + x_t - l} p(k, t) \left(C k - u(I_t + x_t - k - l) + V_{t+1}^*(I_t + x_t - k - l) \right) + \sum_{k=I_t + x_t - l + 1}^{\infty} p(k, t) \left(C(I_t + x_t - l) + V_{t+1}^*(0) \right) \right] - b x_t \end{aligned}$$

donde

$$V_t^*(I) = \max \{V_t(I, x_t) : 0 \leq x_t \leq B - I, x_t \text{ entero}\}$$

- **Condición de Borde**

El estado inicial es $I_1 = 0$ y no hay valor residual para la configuración final: $V_{T+1}(\cdot) = 0$

b) (2 puntos)

En este caso sólo cambia la función de beneficios:

$$\begin{aligned} & V_t(I_t, x_t) \\ &= \mathbb{E}_{d_t, r_t} \left[C \min \{I_t + x_t - r_t, d_t\} - b x_t - u \max \{I_t + x_t - d_t - r_t, 0\} + (c - g) \cdot \max \{d_t - I_t - x_t + r_t, 0\} + V_{t+1}^*(I_{t+1}) \right] \\ &= \mathbb{E}_{r_t} \left[\sum_{k=0}^{I_t + x_t - r_t} p(k, t) \left(C k - u(I_t + x_t - k - r_t) + V_{t+1}^*(I_t + x_t - k - r_t) \right) + \sum_{k=I_t + x_t - r_t + 1}^{\infty} p(k, t) \left(C(I_t + x_t - r_t) + (c - g)(k - I_t - x_t + r_t) + V_{t+1}^*(0) \right) \right] \\ &\quad - b x_t \\ &= \sum_{l=0}^{I_t} q(t, l) \left[\sum_{k=0}^{I_t + x_t - l} p(k, t) \left(C k - u(I_t + x_t - k - l) + V_{t+1}^*(I_t + x_t - k - l) \right) + \sum_{k=I_t + x_t - l + 1}^{\infty} p(k, t) \left(C(I_t + x_t - l) + (c - g)(k - I_t - x_t + l) + V_{t+1}^*(0) \right) \right] \\ &\quad - b x_t \end{aligned}$$

Problema 3

a) (0.6 puntos) Definimos los siguientes eventos:

A : el bandolero está en A .

B : el bandolero está en B .

$SEAi$: el sheriff encuentra al bandolero en A el día i .

$SEBi$: el sheriff encuentra al bandolero en B el día i .

$SNAi$: el sheriff no encuentra al bandolero en A el día i .

$SNBi$: el sheriff no encuentra al bandolero en B el día i .

Si el sheriff busca en A la probabilidad de encontrarlo será:

$$P(SEA1) = P(SEA1|A) \cdot P(A) + P(SEA1|B) \cdot P(B) = 0,25 \cdot 0,4 + 0 = 0,1$$

Si el sheriff busca en B la probabilidad de encontrarlo será:

$$P(SEB1) = P(SEB1|A) \cdot P(A) + P(SEB1|B) \cdot P(B) = 0 + 0,15 \cdot 0,6 = 0,09$$

De lo anterior se concluye que para maximizar la probabilidad de encontrarlo el sheriff debe buscar en A el primer día.

b) (0.6 puntos)

$$\begin{aligned} P(A|SNA1) &= \frac{P(SNA1|A)P(A)}{P(SNA1)} \\ &= \frac{P(SNA1|A)P(A)}{P(SNA1|A)P(A) + P(SNA1|B)P(B)} \\ &= \frac{0,75 \cdot 0,4}{0,75 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

c) (0.6 puntos) Definimos los siguientes eventos:

MA : moneda sale buscar en A .

MB : moneda sale buscar en B .

Ei : el sheriff encuentra al bandolero en el día i .

$$\begin{aligned} P(MA|E1) &= \frac{P(E1|MA)P(MA)}{P(E)} \\ &= \frac{P(E1|MA, A)P(MA, A) + P(E1|MA, B)P(MA, B)}{P(E1|MA, A)P(MA, A) + P(E1|MA, B)P(MA, B) + P(E1|MB, A)P(MB, A) + P(E1|MB, B)P(MB, B)} \\ &= \frac{0,25 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0}{0,25 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0 + 0 + 0,15 \cdot 0,5 \cdot 0,6} \\ &= 0,53 \end{aligned}$$

d) (0.6 puntos) Definimos los siguientes eventos:

$SEAMi$: el sheriff encuentra al bandolero en A muerto en el día i .

$SEAVi$: el sheriff encuentra al bandolero en A vivo en el día i .

Vi : el bandolero está vivo en el día i .

$$\begin{aligned} P(SEAV2) &= P(SEA2|V2) \\ &= P(SEA2|V2, A)P(A) + P(SEAV2|B)P(B) \\ &= P(SEA2|A)P(V2|A)P(A) + 0 \\ &= 0,75 \cdot 0,25 \cdot (1 - 1/3) \cdot 0,4 \\ &= 0,05 \end{aligned}$$

e) (0.6 puntos) Llamemos \tilde{P} a la probabilidad pedida. Notar que:

$$\begin{aligned}
\tilde{P} &= 1 - P(SEAM2|SNA1) \\
&= 1 - \frac{P(SEAM2, SNA1)}{P(SNA1)} \\
&= 1 - \frac{P(SEAM2, SNA1|A)P(A) + P(SEAM2, SNA1|B)P(B)}{P(SNA1|A)P(A) + P(SNA1|B)P(B)} \\
&= 1 - \frac{\frac{1}{3} \cdot 0,75 \cdot 0,25 \cdot 0,4}{0,75 \cdot 0,4 + 1 \cdot 0,6} \\
&= 0,97
\end{aligned}$$

f) (0.6 puntos)

$$P(V4) = \prod_{i=1}^3 \left(1 - \frac{i}{i+2}\right) = 0,13$$

g) (0.6 puntos)

$$P(V4) = \prod_{i=1}^3 \left(1 - \frac{i}{i+2}\right) = 0,13$$

h) (0.6 puntos) En este caso el sheriff encontrará al bandolero con probabilidad 1, por lo que bien lo encontrará en A o en B con la misma probabilidad de que el sujeto pueda estar en A o en B respectivamente. Luego:

$$P(SEA) = P(A) = 0,4$$

i) (0.6 puntos) Sabemos por la parte a) que el sheriff buscará en A al bandolero en el primer día. ¿Qué pasa en el segundo día? Como sabemos de la parte b) que $P(A|SNA1) = 1/3$ podemos decir que la probabilidad de que el sheriff encuentre al bandolero el segundo día si busca en A es: $1/3 \cdot 0,25 = 1/12$. Por otro lado, la probabilidad de que el sheriff encuentre al bandolero el segundo día si busca en B es: $2/3 \cdot 0,15 = 1/10$. Luego el sheriff buscará en B en el segundo día (pues maximiza la probabilidad de encontrar al bandolero). La probabilidad que nunca busque en B entonces es equivalente a la probabilidad que encuentre al bandolero en A en el primer día, la cual ya vimos que era equivalente a 0,1.

j) (0.6 puntos) Corresponde al caso que no lo encuentre en A, pero si en B.

$$\begin{aligned}
P(SEB2) &= P(SEB2|A)P(A) + P(SEB2|B)P(B) \\
&= 0 + 0,15 \cdot 0,6 \\
&= 0,09
\end{aligned}$$

k) (0.6 puntos) Ya vimos en la parte i) que para que busque en B no debe encontrarlo el primer día en A. Luego la probabilidad pedida es:

$$P(A|SNA1) = 1/3$$